

Д. А. АРЦИМОВИЧ, Р. З. САГДЕЕВ

ФИЗИКА  
ПЛАЗМЫ  
ДЛЯ  
ФИЗИКОВ

АТОМЭНЕРГЕТИКА

Л. А. АРЦИМОВИЧ, Р. З. САГДЕЕВ

# ФИЗИКА ПЛАЗМЫ ДЛЯ ФИЗИКОВ



МОСКВА • АТОМИЗДАТ • 1979

# ПЛАЗМА БЕЗ МАГНИТНОГО ПОЛЯ

## § 1.1. Общие сведения о плазме

Плазмой называется ионизованный газ, в котором атомы (все или значительная их часть) потеряли по одному или по несколько принадлежавших им электронов и превратились в положительные ионы. Это только предварительное определение плазмы как особого состояния вещества. В дальнейшем будет дано более точное определение. В общем случае плазма представляет собой смесь трех компонент. Она содержит свободные электроны, положительные ионы и нейтральные атомы (или молекулы). Плазма — это наиболее распространенное состояние вещества в природе. Солнце и звезды можно рассматривать как гигантские сгустки горячей плазмы. Внешняя часть земной атмосферы представляет собой плазменную оболочку — ионосферу. За пределами ионосферы, в магнитосфере Земли, простираются плазмосфера и так называемые радиационные пояса, которые представляют собой своеобразные плазменные образования. В земных условиях в лаборатории и в технике мы встречаемся с плазмой при различных газовых разрядах, так как любой разряд (молния, искра, дуга и т. д.) всегда связан с возникновением плазмы.

В развитии исследований по физике плазмы важными стимулами всегда были перспективы практического применения. Сначала плазма интересовала физиков как своеобразный проводник электрического тока и как источник света. В настоящее время надо рассматривать физические свойства плазмы под другими углами зрения, и тогда плазма предстанет перед нами в новом облике. Во-первых, плазма — это естественное состояние вещества, нагретого до очень высокой температуры, и, во-вторых, это динамическая система — объект приложения электромагнитных сил. Новые методы подхода к изучению поведения плазмы органически связаны с большими техническими проблемами, для которых физика плазмы служит научным фундаментом. Важнейшими из них являются управляемый термоядерный синтез и магнитогидродинамическое преобразование тепловой энергии в электрическую. Возможно, что в недалеком будущем физика плазмы глубоко проникнет также в ускорительную технику.

Однако исследование явлений, происходящих в плазме, представляет интерес не только в связи с различными практическими применениями. Плазма — это материальная среда, образованная коллективом частиц, которые взаимодействуют друг с другом по наиболее простым законам — с помощью электростатических кулоновских сил. Физик обязан, исходя из известной микроструктуры плазмы, объяснить механизм различных процессов, которые происходят в этой среде. Исходные теоретические положения в данном случае обладают исключительной прозрачностью. Как правило, мы находимся здесь в рамках классической физики, так как квантовые эффекты для обычной плазмы не играют сколько-нибудь заметной роли.

Главные усилия экспериментальных исследований в настоящее время направлены на разработку методов получения плазмы со все более высокими параметрами: высокой температурой и большой плотностью. Мы сами создаем объект исследований — высокую температурную плазму, стараясь обеспечить для нее оптимальные условия существования, при которых плазма находится в квазистационарном, устойчивом состоянии.

Прежде чем изучать этот вопрос дальше, уточним определение понятия плазмы. Электрические силы, связывая разноименные заряды в плазме, обеспечивают ее квазинейтральность, т. е. приблизительное равенство концентрации электронов и ионов. Всякое разделение зарядов, обусловленное смещением группы электронов относительно ионов, должно приводить к возникновению электрических полей, которые стремятся скомпенсировать созданное возмущение; эти поля растут с увеличением концентраций частиц и в случае плотной плазмы могут достигать очень больших значений.

Для оценки напряженности поля, возникающего при нарушении нейтральности плазмы, предположим, что в некотором объеме произошло полное разделение зарядов и внутри этого объема остались только заряды одного знака. Электрическое поле в рассматриваемой области удовлетворяет уравнению Пуассона  $\operatorname{div} \mathbf{E} = 4\pi\rho$ , где  $\rho$  — плотность электрического заряда. Если линейные размеры области масштаба  $x$ , а концентрация заряженных частиц в плазме равна  $n$ , то  $\operatorname{div} \mathbf{E} \sim E/x \sim 4\pi n e$  и, следовательно,  $E \sim 4\pi n e x$ . Потенциал плазмы в области разделения зарядов изменится на  $\phi \sim E x \sim 4\pi n e x^2$ .

Рассмотрим пример. Пусть полностью ионизованная плазма получена из водорода, находящегося первоначально при нормальной температуре и давлении 1 мм рт. ст. В каждом кубическом сантиметре такой плазмы будет по  $7 \cdot 10^{16}$  ионов и электронов. Поэтому если резкое нарушение квазинейтральности произойдет в объеме с характерным размером порядка 1 мм, то электрическое поле превзойдет  $10^{10}$  В/см, и в пределах этого объема возникнет разность потенциалов порядка  $10^9$  В. Ясно, что подобное разделение зарядов совершенно нереально. Даже в гораздо более разрежен-

ной плазме резкое нарушение квазинейтральности в указанных объемах будет немедленно ликвидироваться возникающими электрическими полями. Поле будет выталкивать из объема, где произошла декомпенсация зарядов, частицы одного знака и втягивать в эту область частицы противоположного знака. Однако если выделить в плазме достаточно малый объем, то в нем квазинейтральность может и не сохраниться, так как поле, созданное избытком частиц одного знака, окажется слишком слабым для того, чтобы существенно повлиять на движение частиц. При заданных концентрации и температуре плазмы имеется характерный линейный масштаб  $r_D$ , удовлетворяющий следующему условию: если  $x \ll r_D$ , то в пределах объема с линейным размером  $x$  разделение зарядов происходит без существенного влияния на движение частиц, если же  $x \gg r_D$ , то концентрации частиц противоположных знаков в указанном объеме почти одинаковы.

Характерную длину  $r_D$  можно оценить следующим образом. В области с линейным размером  $r_D$  потенциальная энергия заряженной частицы при полном разделении зарядов по порядку величины равна энергии теплового движения частиц  $T^*$ .

Итак, можно привести оценку потенциальной энергии:

$$U = e\varphi \sim 4\pi n e^2 r_D^2 \sim T.$$

Следовательно,

$$r_D \sim (T/4\pi n e^2)^{1/2}.$$

Ту же величину  $r_D$  получаем рассматривая экранирование электрического поля в плазме. Допустим, что в плазму введен «пробный» точечный заряд  $q$ . На достаточно малом расстоянии  $r$  от этого заряда потенциал будет равен  $q/r$ . Однако на больших расстояниях ход потенциальной функции изменится вследствие поляризации плазмы, вызываемой полем заряда  $q$ .

При установившемся статистическом равновесии пространственное распределение электронов и ионов в окрестности пробного заряда определяется законом Больцмана  $n \sim \exp(-U/T)$ . Здесь  $U$  имеет противоположный знак для электронов и ионов. Как нетрудно видеть, возникающая поляризация должна привести к экранировке электрического поля в рассматриваемой области. Вблизи пробного заряда, т. е. при относительно большом абсолютном значении отношения  $U/T$ , концентрация частиц с противоположным знаком заряда более высокая. Это должно привести к резкому ослаблению электрического поля. Расчет, основанный на совместном использовании уравнения Пуассона и закона Больцмана, показывает, что на больших расстояниях от заряда  $q$  потенциал

\* Тепловую энергию частиц плазмы естественно измерять в электронвольтах. В таком случае и температуру плазмы удобно выражать в электронвольтах:  $T(\text{эВ}) = T(\text{град})/11600$ . При таком обозначении температура совпадает с величиной, характеризующей тепловую энергию частиц. В дальнейшем под  $T$  будем понимать температуру плазмы, выраженную в электронвольтах, а под  $T^\circ$  — температуру плазмы в кельвинах.

убывает экспоненциально, а область существования сильного электрического поля вокруг  $q$  ограничена сферой с радиусом порядка  $r_D$ . Характерная длина экранирования впервые введена Дебаём при рассмотрении сильных электролитов. В дальнейшем это понятие было перенесено в физику плазмы. Величину

$$r_D = (T/4\pi n e^2)^{1/2} \quad (1.1)$$

принято называть дебаевским радиусом или дебаевской длиной. Если дебаевский радиус характеризует пространственный масштаб областей декомпенсации заряда, то время, в течение которого эти области существуют, можно найти, разделив  $r_D$  на скорость более быстрых частиц (электронов):

$$t \sim r_D/v_e \approx (T/4\pi n e^2)^{1/2} (m_e/T)^{1/2} = (m/4\pi n e^2)^{1/2}.$$

Чем выше плотность плазмы, тем меньше масштабы декомпенсации зарядов в пространстве и во времени. Внутри области, занятой плотной и холодной плазмой, нарушения квазинейтральности могут происходить только в пределах достаточно малых объемов. В редкой и горячей плазме дебаевская длина может оказаться значительно больше размеров области, занятой плазмой. В этом случае реализуется независимое движение электронов и ионов и отсутствует механизм для автоматического выравнивания концентраций зарядов противоположных знаков.

Используя понятие о дебаевской длине, уточним определение плазмы как особого состояния вещества. Собрание свободно движущихся разноименно заряженных частиц, т. е. ионизованный газ, называется плазмой, если дебаевская длина мала по сравнению с объемом, занимаемым газом. Это определение принадлежит Ленгмюру, основоположнику учения о плазме.

Следует сделать два замечания о введенных здесь параметрах плазмы — концентрации и температуре.

1. Электронная и ионная концентрации в общем случае не должны быть равны друг другу, так как в плазме могут присутствовать не только однозарядные, но также и многозарядные ионы. Пусть  $n_1$  — концентрация однозарядных ионов,  $n_2$  — концентрация ионов с двойным зарядом и т. д., тогда электронная концентрация  $n_e$  равна  $n_1 + 2n_2 + \dots$ . Однако в дальнейшем мы будем интересоваться главным образом случаем, когда концентрации электронов и ионов равны. (Это, в частности, справедливо для чистой водородной плазмы.) Учет влияния многозарядных ионов на основные процессы в плазме обычно не представляет большой трудности.

2. Введение величины  $T$  как температуры плазмы оправдано только тогда, когда средняя кинетическая энергия электронов и ионов одинакова. В общем случае в плазме следует различать по меньшей мере две температуры — электронную  $T_e$  и ионную  $T_i$ . В плазме, которая создается в лабораторных условиях или в природных условиях,  $T_e$  обычно значительно превосходит  $T_i$ . Различие между  $T_e$

и  $T_i$  обусловлено громадной разницей в массах электрона и иона. Внешние источники электрического питания, с помощью которых создается плазма (при различных формах разряда в газах), передают энергию электронной компоненте плазмы, так как именно электроны являются носителями тока. Ионы приобретают тепловую энергию в результате столкновений с быстро движущимися электронами. При таких столкновениях относительная доля кинетической энергии электрона, которая может быть передана иону, не должна превышать  $4m_e/m_i$ . Средняя доля энергии, передаваемой при столкновении, еще меньше. Поскольку  $m_e \ll m_i$ , то электрон должен испытать большое количество (тысячи) столкновений для того, чтобы полностью отдать имеющийся у него излишек энергии. Поскольку параллельно процессам обмена тепловой энергией между электронами и ионами идет процесс приобретения энергии электронами от источников электрического питания, и одновременно с этим энергия уходит из плазмы вследствие различных механизмов теплопередачи, то при электрическом разряде обычно поддерживается большая разность температур электронов и ионов. Этот перепад, как правило, снижается при увеличении концентрации плазмы, потому что число столкновений между электронами и ионами в заданном объеме плазмы растет пропорционально квадрату концентрации.

При некоторых специальных условиях в сильноионизованной плазме  $T_i$  может значительно превзойти  $T_e$ . Такие условия имеют место, в частности, при кратковременных импульсных разрядах большой мощности, которые приводят к возникновению и последующей кумуляции ударных волн в плазме.

## § 1.2. Плазменные колебания

Плазма представляет собой среду, в которой легко возбуждаются различные виды колебаний и волн. Рассмотрим наиболее простой вид колебаний, возникающих при микроскопических отклонениях от квазинейтральности. Пусть в некотором месте в плазме тем или иным способом создается избыток зарядов. Рассмотрим, что при этом произойдет. Проще всего это сделать на примере плоского слоя плазмы. Под действием «возвращающей» силы движение электронов подчиняется уравнению  $m_e \Delta \ddot{x} = -eE_x = -4\pi ne^2 \Delta x$ , где  $\Delta x$  — смещение электронов. Отсюда следует, что рассасывание избыточного заряда сопровождается колебаниями с частотой

$$\omega_p = (4\pi ne^2 / m_e)^{1/2}. \quad (1.2)$$

Это так называемые ленгмюровские колебания. В этих колебаниях ионы плазмы практически не участвуют из-за большой массы. В отличие от звуковых колебаний незаряженного газа, где упругая сила — градиент давления, здесь главную роль играют электрические поля, обусловленные декомпенсацией зарядов. Ленгмюровские колебания могут распространяться в плазме в ви-

де волн с частотой  $\omega = \omega_p$ , которая при использованном нами упрощенном подходе оказалась не зависящей от длины волны. Фазовая скорость таких продольных волн равна  $\omega_p/k$ , где  $k = 2\pi/\lambda$  — волновое число,  $\lambda$  — длина волны. При малых длинах волн (больших значениях  $k$ ) нужно учесть также влияние обычного звукового эффекта, связанного с перепадом давлений в плазме. Для этого обе упругие силы нужно сложить. Нетрудно установить, что квадрат скорости в этом более общем случае равен

$$\omega^2/k^2 = 4\pi n e^2 / m_e k^2 + \partial p_e / \partial \rho_e \quad (1.3)$$

и соответственно

$$\omega^2 = 4\pi n e^2 / m_e + k^2 \partial p_e / \partial \rho_e \quad (1.3a)$$

Здесь  $\rho_e$  — плотность электронного газа ( $\rho_e = n m_e$ ),  $p_e$  — его давление. В такой форме свойства электронных колебаний плазмы были получены еще Ленгмюром. Он исходил из аналогии электронных колебаний плазмы со звуковыми волнами и пользовался уравнениями газодинамики. При вычислении  $\partial p / \partial \rho$  для адиабатического сжатия Ленгмюр положил в уравнении состояния  $\gamma = c_p / c_v = 5/3$ , считая электронный газ одноатомным. Однако это справедливо лишь при условии, что в процессе колебаний все время успевают установиться равнораспределение тепловой энергии между тремя степенями свободы поступательного движения электронов. Практически в любой плазме за один период колебаний  $2\pi/\omega_p$  электроны не испытывают столкновений, и поэтому равнораспределение не устанавливается. А. А. Власов, пользуясь методом кинетического уравнения, установил, что в действительности  $\gamma = 3$ .

Этот результат можно получить на основании очень простых рассуждений, даже не обращаясь к кинетическому уравнению. Пусть слой газа ограничен двумя параллельными плоскими стенками, расстояние между которыми медленно изменяется. Если столкновения между частицами происходят очень редко, то для компоненты скорости частицы, которая направлена перпендикулярно к стенкам, должно иметь место сохранение адиабатического инварианта  $v_{\perp} l = \text{const}$ , где  $l$  — расстояние между стенками. Это нетрудно доказать, рассматривая отражение частиц от подвижной стенки. Поэтому давление на стенку  $n m v_{\perp}^2$  будет изменяться пропорционально  $n/l^2$ , а поскольку  $n \sim 1/l$ , то  $p \sim n^3$ , т. е.  $\gamma = 3$ . Фактически это уравнение состояния для адиабатического сжатия одномерного газа. Его можно получить также термодинамическим путем. При указанном значении  $\gamma$  соотношение (1.3) перепишем в виде

$$\omega^2 = \omega_p^2 + 3k^2 T_e / m_e \quad (1.3b)$$

Второе слагаемое в уравнении (1.3b) меньше первого во всех случаях, когда речь идет о длинах волн, достаточно больших по сравнению с дебаевской длиной.



Зависимость частоты колебаний от волнового числа  $k$  (так называемая дисперсионная кривая) изображена на рис. 1.1. При больших  $k$  (коротких  $\lambda$ ) частота асимптотически должна приближаться к линейному закону дисперсии типа звуковой волны в газе электронов.

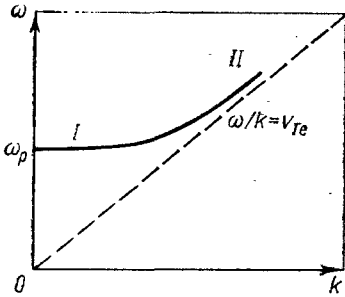


Рис. 1.1. Дисперсионная кривая ленгмюровских колебаний:  
I — длинноволновая область,  $kr_D \ll 1$ ;  
II — область коротких длин волн

Существенное влияние на распространение волн в плазме с низкой электронной температурой оказывают столкновения электронов с ионами. При таких столкновениях энергия упорядоченного движения электронов, т. е. энергия волны, уменьшается (происходит затухание волны). Этот обычный механизм затухания проявляется как при распространении в плазме продольных волн, связанных с электронными колебаниями ленгмюровского типа, так и при прохождении через плазму поперечных электромагнитных волн. Но наиболее неожиданный и важный эффект, относящийся к физике ленгмюровских колебаний, был предсказан Л. Д. Ландау. Он обнаружил, что даже в отсутствие столкновений (т. е. сил трения) электронные колебания затухают. Особенно велико затухание для волн с большими  $k$ . Так, волны с  $k > 1/r_D$  затухают столь быстро, что становится вообще бессмысленным продолжать дисперсионную кривую (см. рис. 1.1) в область таких значений  $k$ . Причина «затухания по Ландау» заключается в обратном эффекте Вавилова — Черенкова, в результате которого электроны, движущиеся со скоростями, близкими к фазовой скорости волны, поглощают энергию колебаний. Ниже (см. § 1.12) это интересное явление подробно рассмотрено с помощью кинетического уравнения. Здесь же мы разъясним лишь качественную сторону его физического механизма.

На рис. 1.2 изображен потенциальный рельеф ленгмюровской плазменной волны, распространяющейся вдоль оси  $x$  с фазовой скоростью  $v_\phi$ . Пусть система координат перемещается вместе с волной. В этом случае электрический потенциал можно представить в виде периодической функции  $\phi(x)$ , не зависящей от времени. Для упрощения анализа мы составили  $\phi(x)$  из прямоугольных кусков. Электрон, скорость которого в лабораторной системе координат (л. с. к.) равна  $v$ , изображен на рис. 1.2 точкой, двигающейся со скоростью  $u = v - v_\phi$ . Если  $m_e u^2 / 2 < e\phi_0$ , где  $\phi_0$  —

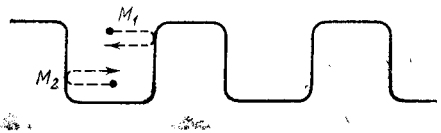


Рис. 1.2. Схема обмена энергией между «резонансными» электронами и волной

амплитуда электрического потенциала волны, то электрон будет заперт в потенциальной яме между двумя потенциальными горбами. Отражаясь от этих горбов, электрон будет обмениваться энергией с волной. Такие «резонансные» электроны принадлежат к узкому участку спектра скоростей, так как обычно амплитуда потенциала волны, умноженная на заряд электрона, мала по сравнению со средней кинетической энергией теплового движения электрона. Электроны, не принадлежащие к этому участку спектра, испытывают только относительно слабое воздействие поля волны. Резонансные частицы можно разделить на две группы: 1) догоняющие волну ( $v > v_\phi$ ) и 2) отстающие от волны ( $v < v_\phi$ ). На рис. 1.2 точка  $M_1$  изображает электрон, принадлежащий к первой группе, а точка  $M_2$  — электрон второй группы. В этой системе координат, движущейся вместе с волной, обе частицы после столкновения с потенциальными горбами изменяют направление скорости (без изменения ее значения). Поэтому в лабораторной системе координат догоняющий электрон после столкновения будет иметь скорость  $v_1 = v_\phi - v + v_\phi < v$ , т. е. часть кинетической энергии от электронов будет передана волне. В противоположном случае отстающий электрон после столкновения с гребнем волны приобретает дополнительную энергию. При максвелловском распределении электронов в плазме по скоростям догоняющих частиц меньше, чем отстающих, и поэтому суммарный эффект взаимодействия резонансных частиц с волной должен заключаться в перекачке энергии волны в энергию теплового движения, что должно привести к затуханию колебаний. Очевидно, что чем больше концентрация резонансных частиц, тем более сильным должно быть затухание. При максвелловском распределении по скоростям оно должно быстро возрастать с уменьшением  $v_\phi$ . Фазовая скорость волны падает с уменьшением длины волны, и для длин волн, меньших дебаевского радиуса  $r_D$ , она оказывается порядка тепловой скорости электронов  $v_{Te}$ . В этом случае (область II на рис. 1.1) затухание становится настолько сильным, что волны не могут распространяться в плазме. В противоположном случае, при  $v_\phi \gg v_{Te}$ , число резонансных частиц экспоненциально уменьшается, и затухание должно быть очень слабым.

Приведем грубую оценку скорости изменения амплитуды волны. Эта величина характеризуется так называемым декрементом затухания — логарифмической производной по времени от энергии волны  $\gamma = (1/2W) dW/dt$ , где  $W$  — энергия волны в единице объема.

При одном столкновении электрон первой группы (опережающий волну) теряет энергию:

$$\Delta \omega_e = m_e v^2 / 2 - m_e (2\omega/k - v)^2 / 2 = 2m(v - \omega/k) \omega / k.$$

Число столкновений с потенциальными горбами волны, которое один электрон испытывает за 1 с, равно скорости движения элек-

трона относительно волны, деленной на расстояние между горбами  $\lambda$ .

Электрон, опережающий волну, передает ей в единицу времени энергию  $2m(v - \omega/k)^2 \omega/k\lambda$ . Энергия, которую получает электрон, отстающий от волны, определяется таким же выражением.

Суммируя по всем электронам, захваченным волной  $E_0 \sin kx$ , находим, что изменение энергии волны определяется выражением

$$dW/dt = (2m_e \omega/k\lambda) \int_{\omega/k}^{(\omega/k) + (2eE_0/m_e k)^{1/2}} (v - \omega/k)^2 f_0^e(v) dv - \\ - (2m_e \omega/k\lambda) \int_{(\omega/k) - (2eE_0/m_e k)^{1/2}}^{\omega/k} (v - \omega/k)^2 f_0^e(v) dv. \quad (1.4)$$

Здесь  $f_0^e(v)$  — равновесная функция распределения электронов по компоненте скорости в направлении распространения волны, так что  $f_0^e(v) dv$  — число электронов со скоростями в интервале  $v, v + dv$ . Считая, что  $E_0$  мала и, следовательно,  $v$  незначительно отличается от  $\omega/k$ , можно представить  $f_0^e(v)$  в виде

$$f_0^e(v) = f_0^e(\omega/k) + df_0^e/dv|_{v=\omega/k} (v - \omega/k).$$

Подставляя это выражение в (1.4) и интегрируя, получаем

$$dW/dt = (2e^2/\pi m_e) (\omega/k^2) E^2 df_0^e/dv|_{v=\omega/k}. \quad (1.5)$$

Для определения инкремента надо вычислить энергию, запасенную в волне. Энергия волны, приходящаяся на единицу объема,

$$W = \overline{E^2}/8\pi + nm_e \overline{v_e^2}/2,$$

где  $\overline{E^2}$  — среднее значение квадрата напряженности электрического поля;  $\overline{v_e^2}$  — средний квадрат скорости электронов в волне. Средние значения потенциальной и кинетической энергии при продольных колебаниях электронов приблизительно равны. Следовательно,  $W = \overline{E^2}/4\pi$ . Из (1.5) получим выражение для инкремента

$$\gamma \sim (4e^2 \omega/m_e k^2) df_0^e/dv|_{v=\omega/k}.$$

Для продольных плазменных волн  $\omega \approx \omega_p$ , и окончательно имеем

$$\gamma \sim (\omega_p^2/k^2) \frac{1}{n} df_0^e/dv|_{v=\omega/k}.$$

Продольные ленгмюровские колебания следует учитывать при рассмотрении спектра теплового (черного) излучения плазмы. Вклад этих колебаний в равновесную энергию плазменного состояния можно учесть по порядку величины, если положить на каждую степень свободы  $T/2$  и принять (как это делается в теории излучения) число степеней свободы равным объему в фазовом пространстве волновых чисел. Поскольку из-за затухания

Ландау существует граница значений волновых чисел  $k_m \sim 1/r_D$ , такая, что колебания с волновыми числами выше нее не могут раскачиваться, то фазовый объем  $V_{\text{фаз}} \approx 1/r^3_D$ . Поэтому энергия колебаний на единицу объема  $W_0 \approx (1/r^3_D) T/2$ . Такая оценка справедлива, так как  $\hbar\omega_p \ll T_e$ , и поэтому для электронных колебаний соблюдается статистика Рэлея — Джинса.

Все сказанное выше относится к случаю, когда распределение электронов термодинамически равновесно, т. е. спектр скоростей подчиняется закону Максвелла. Если же распределение электронов по скоростям хотя бы на небольшом участке спектра сильно отклоняется от равновесного, то становится возможной раскачка колебаний до очень большой амплитуды, т. е. в этом случае может иметь место один из видов неустойчивости плазмы.

Из элементарного анализа механизма затухания волн, который был сделан выше, следует, в частности, что раскачка колебаний может возникнуть, если функция распределения электронов по скоростям имеет в некоторой области значений максимум. В этом случае для волн с фазовыми скоростями, несколько меньшими скорости, соответствующей максимуму функции распределения, среди резонансных частиц будет преобладать группа «догоняющих волну»:  $df_e^0/dv|_{v=v_\phi} > 0$ .

При сильной раскачке колебания могут играть большую роль в динамике плазменных процессов. Иногда такую плазму полезно рассматривать даже как смесь двух газов: собственных частиц плазмы (электронов и ионов) и квазичастиц — колебаний. Такой подход положен в основу современной трактовки многих турбулентных явлений (см. § 1.15—1.18). В газе «квазичастиц» кроме ленгмюровских колебаний иногда нужно учитывать также и другие виды колебаний, в частности низкочастотные. В плазме без магнитного поля — это продольные колебания ионов. По существу, колебания, в которых принимает участие вся масса вещества в плазме, представляют собой не что иное, как распространение звука со скоростью  $c_s = (dp/d\rho)^{1/2}$ . Как известно, в обычном газе звуковые колебания имеют смысл лишь в том случае, если длина звуковой волны значительно больше средней длины свободного пробега атомов или молекул. Оказывается, что в плазме из-за наличия дальнедействующих кулоновских сил (которые образуют так называемое самосогласованное поле) могут существовать звуковые колебания также и в противоположном предельном случае, т. е. тогда, когда длина звуковой волны значительно меньше длины свободного пробега. Звуковые колебания в плазме без магнитного поля рассмотрены в § 1.11.

### § 1.3. Классификация видов плазмы

С помощью введенных понятий о дебаевской длине и плазменной частоте можно классифицировать встречающиеся в природе плазмы на разреженные и плотные, классические и квантовые.

Внутренняя энергия плазмы складывается из кинетических энергий ионов и электронов и из энергии их электростатического кулоновского взаимодействия (в плазме, нагретой до релятивистских температур, нужно учитывать и магнитное взаимодействие). Сравним среднюю кинетическую энергию  $(3/2)T$ , приходящуюся на одну частицу, со средней энергией взаимодействия. Из-за дебаевского экранирования взаимодействие заряженной частицы с далекими частицами несущественно, и надо учитывать в основном лишь ближайших соседей. Среднее расстояние до соседней частицы  $r \sim (1/n)^{1/3}$ , следовательно, энергия взаимодействия приблизительно равна  $e^2 n^{1/3}$ . Поэтому, как правило, плазму можно считать идеальным газом, если  $e^2 n^{1/3} \ll T$ . Если обе части неравенства возвести в степень  $3/2$ , то, как легко заметить, неравенство примет следующий вид:  $nr^3_D \gg 1$ . Таким образом, условие идеальности плазмы можно записать через число частиц в объеме с размерами порядка дебаевской длины. Это число должно быть много больше единицы\*. При  $nr^3_D \gg 1$  тепловая энергия частиц превышает как энергию электростатического взаимодействия, так и равновесную энергию электронных колебаний плазмы. Если указанное условие не выполнено, плазма уже не является газом, а скорее напоминает жидкость с, вообще говоря, очень сложным и до сих пор неизвестным уравнением состояния. При дальнейшем повышении плотности плазмы можно ожидать ее металлизации. При больших плотностях в плазме должны проявляться также и квантовые эффекты. Сначала их следует учитывать в ленгмюровских колебаниях. Очевидно, это должно произойти тогда, когда квант энергии плазменных колебаний станет сравнимым со средней тепловой энергией, приходящейся на один электрон. При этом условии длина волны де-Бройля для электронов со скоростями порядка средней тепловой оказывается сравнимой с дебаевским радиусом. Еще раньше, когда будет выполнено условие  $\hbar/m_e v_{Te} \sim 1/n^{1/3}$ , т. е. длина волны де-Бройля будет сравнима со средним расстоянием между электронами, квантовой становится статистика электронов (распределение Ферми—Дирака вместо больцмановского). Это так называемая квантовая вырожденная плазма.

В квантовой плазме начинают играть роль обменные взаимодействия, и вид дисперсионного уравнения для плазменных волн (1.36) несколько меняется:

$$\omega^2 = \omega_p^2 + (3/5)(1 - ar_s)k^2 v_F^2.$$

Здесь  $v_F$  — скорость Ферми;  $a$  — численный коэффициент ( $\sim 0,06$ );  $r_s$  — безразмерный параметр, характеризующий отношение энергии взаимодействия к энергии Ферми.

\* При более строгом анализе следовало бы учесть, что вклады в энергию кулоновского взаимодействия порядка  $e^2 n^{1/3}$  за счет притяжения и отталкивания взаимно погашаются. Однако окончательный критерий идеальности  $nr^3_D \gg 1$  остается справедливым.

Согласно принципу Паули два электрона с одинаковыми спинами не могут находиться в одной и той же точке пространства, поэтому потенциальная энергия взаимного электростатического отталкивания электронов, а значит, и возвращающая сила в плазменных колебаниях несколько уменьшаются. Однако, поскольку обменные силы короткодействующие, они не могут изменить частоту леигмюровских волн с бесконечной длиной волны и влияют лишь на частоту волн с конечной величиной волнового вектора.

Подавляющее большинство плазм в природе можно считать идеальным газом (космическая, газоразрядная и т. п.). Примером неидеальной плазмы могут служить сильные электролиты. Наиболее интересными из них являются растворы щелочных металлов в аммиаке, где хорошо прослеживается переход к жидкому плазменному состоянию и металлизации. Представителем квантовой плазмы можно считать электронный газ в металлах: при плотности конденсированного вещества ( $n_e \sim 10^{23} \text{ см}^{-3}$ ) квант энергии плазменных колебаний по порядку величины оказывается равным единицам электронвольт. Квантовыми свойствами может обладать и плазма, состоящая из электронов и положительно заряженных квазичастиц — дырок в полупроводниках. Виды плазмы такого рода принято объединять под названием плазма твердого тела. Явление квантового вырождения должно иметь место и для электронного газа в очень плотном веществе звезд — белых карликов.

Свойства плазмы усложняются, если одновременно с заряженными частицами (ионами и электронами) в ней существуют также нейтральные атомы и молекулы, т. е. плазма не является полностью ионизованной.

Степень ионизации плазмы — отношение числа заряженных частиц к первоначальному числу атомов — определяется конкуренцией между процессами ионизации (развала атомов) и обратным процессом рекомбинации, т. е. воссоединения электронов и ионов в нейтральные частицы. В термодинамически равновесной плазме степень ионизации не зависит от деталей этих процессов, и, в принципе, ее можно установить чисто термодинамическим путем. Наиболее просто законы термодинамики выглядят для идеальной плазмы, т. е. такой, в которой кинетическая энергия заряженных частиц значительно превышает энергию их взаимодействия. Допустим, что мы имеем дело лишь с однократной ионизацией. Согласно общим принципам статистической физики отношение вероятностей нахождения электрона в состояниях с энергией  $\omega_1$  и  $\omega_2$  при заданной температуре  $T$  равно

$$(g_1/g_2) \exp[(-\omega_1 + \omega_2)/T]. \quad (1.6)$$

Здесь  $g_1$  и  $g_2$  — квантовые веса состояний с энергиями  $\omega_1$  и  $\omega_2$  соответственно. Степень ионизации газа, т. е. отношение числа свободных электронов к числу нейтральных атомов, определяется вы-

ражением (1.6), в котором следует положить  $\omega_1 - \omega_2 = I$ , где  $I$  — энергия ионизации.

В этом случае  $g_1$  — число квантовых ячеек в фазовом пространстве для свободного электрона;  $g_2$  — квантовый вес стационарного энергетического уровня в атоме. Если для простоты не учитывать возможность перехода электрона на возбужденные уровни атома и предположить, что основное состояние является невырожденным, то  $I$  — энергия ионизации для основного состояния и  $g_2 = 1$ . Свободные электроны имеют сплошной спектр по энергиям. Квантовый вес свободных состояний приблизительно равен объему фазового пространства для электрона с средним тепловым импульсом  $(2m_e T)^{1/2}$ , деленному на элементарный фазовый объем:

$$g_1 \approx (2m_e T)^{3/2} V_0 / (2\pi\hbar)^3.$$

В этом выражении  $V_0$  — геометрический объем, приходящийся на один электрон, т. е.  $V_0 = 1/n_e$ . Следовательно,

$$g_1 \approx [1/n_e (2\pi\hbar)^3] (2m_e T)^{3/2}.$$

Используя этот результат, мы получаем так называемую формулу Саха, которая определяет зависимость степени ионизации газа от температуры:

$$n_e/n_a = (g_1/g_2) \exp(-I/T) \approx [(2m_e T)^{3/2} / n_e (2\pi\hbar)^3] \exp(-I/T). \quad (1.7)$$

В другой записи (более удобной для вычисления отношения  $n_e/n_a$  при слабой степени ионизации) формула (1.7) приобретает вид

$$n_e/n_a \approx [(2m_e T)^{3/4} / n_a^{1/2} (2\pi\hbar)^{3/2}] \exp(-I/2T). \quad (1.7a)$$

Из формулы Саха следует, что чем меньше плотность (т. е. концентрация атомов) газа, тем легче его ионизовать. При плотностях, значительно меньших плотности конденсированного вещества, высокая степень ионизации достигается еще при температурах  $T \ll I$ . Но при слишком малых плотностях труднее достигнуть термодинамического равновесия, потому что реже происходят столкновения между частицами, устанавливающие равнораспределение по степеням свободы. В термодинамически неравновесных плазмах для определения степени ионизации приходится рассматривать специфику процессов столкновений, приводящих к ионизации и рекомбинации. Рассмотрение подобных вопросов в настоящей книге увело бы нас слишком далеко от поставленной цели.

Общепринято также делить плазму на высоко- и низкотемпературную. Это разделение в значительной степени связано с видами конкретных исследований и их приложений. Так, с высокотемпературной плазмой связаны исследования по проблеме управляемого термоядерного синтеза. Именно эти исследования стимулировали бурный расцвет физики высокотемпературной плаз-

мы в 50—60-х годах, позволивший объяснить многие явления и в физике радиационных поясов, и в некоторых новых областях астрофизики. Низкотемпературная плазма является рабочим телом — газообразным проводником для магнитогидродинамических генераторов.

Холодную плазму в ионосфере можно рассматривать как одну из природных форм реализации низкотемпературной плазмы. Изложенную классификацию плазм удобно проиллюстрировать диаграммой (рис. 1.3). Поскольку интересы авторов относятся, главным образом, к большим  $T$ , книга практически посвящена физике горячей, полностью ионизованной плазмы.

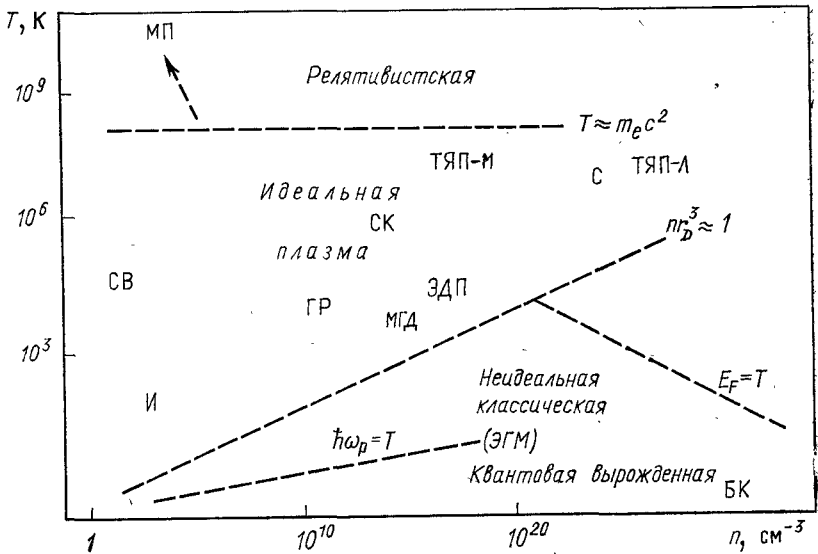


Рис. 1.3. Классификация видов плазм:

*ГР* — плазма газового разряда; *МГД* — плазма в магнитогидродинамических генераторах; *ТЯП-М* — плазма в термоядерных магнитных ловушках; *ТЯП-Л* — плазма в условиях лазерного термоядерного синтеза; *ЭГМ* — электронный газ в металлах; *ЭДП* — электронно-дырочная плазма полупроводников; *БК* — вырожденный электронный газ в белых карликах; *И* — плазма ионосферы; *СВ* — плазма солнечного ветра; *СК* — плазма солнечной короны; *С* — плазма в центре Солнца; *МП* — плазма в магнитосферах пульсаров

Широкое использование численных методов в физике плазмы, первоначально служившее подспорьем при анализе экспериментов и их сопоставлении с теорией, сейчас привело к самостоятельному направлению, имеющему дело с так называемой численной плазмой. Прямые решения на быстродействующих вычислительных машинах уравнений движения  $N$  взаимодействующих заряженных частиц часто называют численными экспериментами. В некоторых случаях  $N$  удается довести до  $10^6$ .



## § 1.4. Столкновения частиц в плазме

Проанализируем общую картину движения электронов и ионов в плазме при отсутствии внешних полей. Характер этого движения определяется законами взаимодействия частиц. В плазме с высокой степенью ионизации основная форма взаимодействия частиц — рассеяние в кулоновском поле. Нужно различать три основных типа элементарных актов рассеяния: рассеяние электронов на ионах, электронов на электронах и ионов на ионах. Другие элементарные процессы происходят либо с излучением фотонов (они будут рассмотрены в § 1.8), либо в них участвуют также и нейтральные частицы (и тогда они отступают на задний план по мере повышения степени ионизации). Примером процессов первого рода может служить испускание тормозного излучения при электрон-ионных столкновениях, примером второго — процессы ионизации и возбуждения атомов электронным ударом и явления перезарядки ионов на атомах. Если рассматривается неводородная плазма, то в общем случае следует учитывать взаимодействие электронов с ионами, находящимися в различных энергетических состояниях. В этом случае интенсивность излучения возбужденных ионов может оказаться очень большой, она будет играть заметную роль в энергетическом балансе плазменных процессов.

Мы ограничимся, в основном, анализом взаимодействия частиц в полностью ионизованной плазме.

Пусть через плазму проходит некоторая «пробная» частица (в качестве таковой мы можем выбрать любой электрон или ион плазмы, зафиксировав внимание на его траектории). Эта заряженная частица испытывает акты рассеяния на своем пути. Если речь идет о движении легкой частицы среди совокупности тяжелых частиц (электрона среди ионов), то центры рассеяния можно считать неподвижными. В указанном случае вероятность рассеяния на тот или иной угол определяется классической формулой Резерфорда.

Каждый акт рассеяния, обусловленный пролетом пробной частицы мимо рассеивающего центра, приводит к повороту траектории частицы на некоторый угол  $\theta$ , т. е. к уменьшению скорости по первоначальному направлению движения от  $v$  до  $v \cos \theta$ . В подавляющем большинстве случаев акты рассеяния происходят на дальних дистанциях, т. е. при больших расстояниях, и, следовательно, как правило, сопровождаются очень малым изменением направления траектории (характерная особенность резерфордовского рассеяния в электрическом поле точечных зарядов!). Поэтому привычная для кинетической теории газов изломанная траектория частицы, состоящая из отдельных прямолинейных участков — пробегов, которые соединяют места «столкновений», в данном случае не имеет смысла. Вместо этого появляется картина плавно изгибающейся линии, направление ее изменится под действием многочисленных, но вместе с тем очень слабых импуль-

сов, обусловленных «столкновениями» с другими частицами. Фактически эти импульсы сливаются в непрерывный ряд воздействий, оказываемых на движущуюся частицу «микрорем» плазмы, образуемым суперпозицией электрических полей отдельных частиц.

В рассматриваемом случае естественно ввести понятие о длине свободного пробега  $l$  как о расстоянии, на протяжении которого частица сохраняет первоначальное направление своей скорости. Это определение соответствует следующему равенству:

$$dv = -v dx / l. \quad (1.8)$$

Здесь  $dv$  — среднее изменение компоненты скорости по первоначальному направлению движения при прохождении отрезка пути  $dx$ . С учетом  $dx = v dt$  (1.8) можно переписать в виде уравнения движения с некоторой эффективной силой трения:

$$m dv / dt = -m v (v / l) = -m v v, \quad (1.8a)$$

где введенную таким образом величину  $v = v / l$  называют частотой столкновений.

Пользуясь определением (1.8a), можно представить  $l$  с помощью интеграла по угловому распределению рассеянных частиц. Если вектор скорости поворачивается при столкновении на угол  $\theta$ , то проекция скорости по первоначальному направлению движения уменьшается на величину  $\Delta v = v(1 - \cos \theta)$ . Поскольку основную роль играют акты рассеяния на малые углы ( $\theta \ll 1$ ), то изменение скорости при элементарном столкновении можно представить как  $\Delta v \approx v \theta^2 / 2$ . Суммарное изменение скорости из-за рассеяния на нескольких центрах  $\Delta v_N = (v/2) \sum \theta_i^2$ , где суммирование проводится по всем  $N$  рассеивающим центрам. При прохождении элементарного отрезка пути  $dx$  заряженная частица встретится с  $n dx \int ds$  рассеивающими центрами, находящимися на всевозможных прицельных расстояниях. Поэтому элемент площади  $ds$  можно выразить с помощью прицельного расстояния  $b$  как  $ds = 2\pi b db$ , тем более что элементарный угол рассеяния  $\theta$  зависит именно от  $b$ . Для малых углов рассеяния  $\theta$  справедливо соотношение  $\theta \approx v_{\perp} / v$ , где  $v_{\perp}$  можно найти с помощью компоненты уравнения движения, перпендикулярной к направлению начальной скорости:

$$m \dot{v}_{\perp} \approx Ze^2 l / (b^2 + v^2 t^2)^{3/2}.$$

Здесь мы предположили, что траектория пробной частицы представляет собой почти прямую линию, а расстояние наибольшего сближения практически совпадает с прицельным параметром. Отсюда

$$v_{\perp} \approx (2Ze^2/m) \int_0^{\infty} [b / (b^2 + v^2 t^2)^{3/2}] dt = 2Ze^2 / mbv.$$

т. е.  $\theta \approx 2Ze^2/mv\sigma^2$ . Следовательно, средняя величина

$$\overline{d\sigma} = -dxnv2\pi \int_{b_{\min}}^{b_{\max}} \theta^2 b db = -dxnv(4\pi Z^2 e^4/m^2 v^4) \ln(b_{\max}/b_{\min}). \quad (1.9)$$

Сравнивая (1.9) с формулой (1.8), получаем

$$l = (1/4\pi n) (mv^2/Ze^2)^2 [1/\ln(b_{\max}/b_{\min})]. \quad (1.10)$$

Величины  $b_{\max}$ ,  $b_{\min}$  оценим исходя из следующих соображений. Электрическое поле рассеивающего центра можно считать кулоновским только на расстояниях, меньших дебаевского радиуса  $r_D$ . На больших расстояниях оно убывает экспоненциально, и, следовательно, столкновения, при которых частица проходит мимо рассеивающего центра на расстояниях, превышающих  $r_D$ , нужно из рассмотрения исключить. В действительности, конечно, дебаевское облако вокруг движущегося заряда лишь в грубом приближении можно считать сферическим. Время релаксации — установления такого облака — имеет тот же порядок величины, что и время пролета зарядом со средней тепловой скоростью расстояния, сравнимого с радиусом облака. Но строгая теория приводит лишь к небольшому количественному уточнению окончательного выражения для длины свободного пробега. Поэтому при вычислении  $l$  используем указанный метод обрезания предельного параметра  $b_{\max}$  на величине  $r_D$ .

В качестве  $b_{\min}$  можно взять прицельное расстояние, отвечающее рассеянию на углы  $\theta \sim 1$ , при которых нарушилось бы приближение малых углов. Полагая  $\theta \sim 1$ , находим

$$b_{\min} \sim Ze^2/mv^2. \quad (1.11)$$

Поскольку стоящая под знаком логарифма в (1.10) величина, которая получена таким образом для актов взаимодействия частиц в плазме, оказывается очень большой (во всех представляющих интерес случаях от  $10^4$  до  $10^8$ ), то приближительность оценки  $b_{\max}$  и  $b_{\min}$  практически не отражается на точности вычисления  $l^*$ . Предположения, при которых найдено выражение для длины свободного пробега  $l$ , выполняются в случае, когда пробной частицей является электрон и рассматривается его взаимодействие с ионами плазмы. Среднюю длину свободного пробега, соответствующую электрон-ионным столкновениям в плазме, обозначим  $l_{ei}$ . Ее получают при усреднении выражения (1.10) по энергетическому спектру электронов. Если все ионы в плазме имеют единичный заряд, то, предполагая максвелловское распределение электронов по энергиям, получаем следующее выражение для средней длины свободного пробега:

\* Более строгое рассмотрение, учитывающее квантовые эффекты в кулоновском рассеянии, при условии  $Ze^2/hv < 1$  (квазиклассическое приближение нарушено) приводит к видоизмененному выражению под знаком логарифма. Вместо  $b_{\min}$  появляется длина волны де-Бройля  $\hbar/mv$ . Однако численно изменение значения логарифма незначительно.

$$l_{ei} = 4,5 \cdot 10^5 (T_e^\circ)^2 / n L_K, \quad (1.12)$$

где  $T_e^\circ$  — температура электронов, К;  $L_K$  — так называемый кулоновский логарифм. Он получается при подстановке в выражение  $\ln(b_{\max}/b_{\min})$  значений  $b_{\max} = r_D$ ,  $b_{\min} = q_e q_i / m_e v^2$  и  $m_e v^2 = 3T_e$ ,  $q_e = -q_i = -e$ . В очень широких пределах изменения  $n$  и  $T_e$  логарифм  $L_K$  изменяется от 10 до 20. Поскольку в физике плазмы часто достаточно даже довольно грубой оценки величин, характеризующих процессы столкновений между частицами, то в дальнейшем будем считать  $L_K = 15$ .

Кроме  $l_{ei}$  можно ввести также некоторые другие усредненные характеристики процессов столкновения между электронами и ионами. Эффективное сечение для таких столкновений определяется соотношением  $l_{ei} = 1/n\sigma_{ei}$ , среднее время между двумя соударениями  $\tau_{ei} = l_{ei}/v_{Te}$ , где  $v_{Te}$  — средняя тепловая скорость электронов. Частота столкновений  $\nu_{ei} = 1/\tau_{ei}$ . Указанные величины можно вычислить по следующим формулам:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{ei} &\approx 3 \cdot 10^{-16} (1/(T_e^\circ)^2); \quad \tau_{ei} \approx 5 \cdot 10^{-2} (T_e^\circ)^{3/2} / n; \\ \nu_{ei} &\approx 20 (n/(T_e^\circ)^{3/2}). \end{aligned} \right\} \quad (1.13)$$

Выражения для всех указанных параметров нетрудно обобщить на случай, когда столкновения происходят с многозарядными ионами. Эффективное сечение  $\sigma_{ei}$  возрастет в этом случае пропорционально квадрату заряда иона, соответственно изменятся и остальные величины.

Среди различных видов взаимодействия частиц в плазме столкновения между электронами и ионами играют наиболее важную роль, определяя, в частности, механизм таких процессов, как протекание электрического тока и диффузию.

Для полной характеристики кулоновского взаимодействия частиц в плазме нужно ввести такие же параметры, характеризующие статистический эффект столкновений между идентичными частицами (электрон-электронные и ион-ионные столкновения). В этом случае расчет осложняется тем, что при анализе элементарных актов столкновения нужно учитывать движение рассеивающих центров. Однако очевидно, что учет эффекта может отразиться только на значении численного коэффициента в формулах для средней длины свободного пробега, а температурная зависимость должна иметь одинаковый характер. В частности, выражение для  $l_{ee}$  (средняя длина свободного пробега при электрон-электронных столкновениях) должно совпадать с выражением для  $l_{ei}$  с точностью до численного коэффициента, не очень сильно отличающегося от единицы. Формула для  $l_{ii}$  (средняя длина свободного пробега при ион-ионных столкновениях) получается из формулы для  $l_{ei}$  при замене  $T_e$  на  $T_i$ . Значения  $\tau_{ee}$  и  $\tau_{ei}$  близки друг к другу.

Отношение  $\tau_{ii}/\tau_{ee}$  равно  $(m_i T_i^3/m_e T_e^3)^{1/2}$ . При равных электронной и ионной температурах ион-ионные соударения происходят гораздо реже, чем электрон-электронные или электрон-ионные.

Рассеивающими свойствами обладают не только хаотические микрополя отдельных заряженных частиц, но и электрическое поле плазменных колебаний. Попробуем хотя бы грубо оценить длину свободного пробега электрона из-за взаимодействия с равновесными (Рэля—Джинса) колебаниями плазмы. Воспользуемся для этого формулой  $\Delta v = -v(\Delta x/l)$ . Пусть  $\Delta x$  порядка нескольких дебаевских длин, т. е. порядка самых коротких длин плазменных колебаний. Изменение продольной скорости на этом расстоянии составит  $\Delta v = -v(1 - \cos \theta) \approx -v(\theta^2/2)$ , где  $\theta$  — угол отклонения электрона под действием поперечной компоненты электрического поля колебаний  $E_{\perp}$ . Значение этого угла можно считать равным отношению средней поперечной скорости, приобретаемой электроном в поле  $E_{\perp}$ , к продольной скорости  $v$ . Следовательно, угол  $\theta \sim (eE_{\perp}/2m_e \omega_p)(1/v)$ . Отсюда

$$\Delta v \sim (1/8v)(eE_{\perp}/m_e \omega_p)^2; \quad l \sim 8r_D v^2 (m_e \omega_p/eE_{\perp})^2.$$

Принимая во внимание, что  $E_{\perp}^2 = (2/3)E^2 \approx 8\pi \cdot 1,38 \cdot 10^{-16} T_e^2 / 3r_D^2$ , получаем  $l \approx 10^5 (T_e^2/n)$ . Таким образом, при грубой оценке вклад поля колебаний с  $\lambda > r_D$  в процессы рассеяния электронов оказывается примерно на порядок (в кулоновский логарифм раз) меньше вклада, который дают элементарные акты кулоновского столкновения частиц. Строгий расчет показывает, что и элементарные акты кулоновского рассеяния и рассеяние на колебаниях плазмы могут быть выведены как частные случаи взаимодействия частиц с флуктуациями микрополя. При этом «парные» столкновения — это результат рассеяния на флуктуациях микрополя, пространственные размеры которого меньше  $r_D$ . Флуктуации же с  $\lambda > r_D$  надо рассматривать как суперпозицию плазменных колебаний.

Таким образом, длина пробега электрона из-за рассеяния на термодинамически равновесном фоне плазменных колебаний на порядок величины больше пробега по отношению к парным соударениям. Но плазма часто оказывается неустойчивой: амплитуды плазменных колебаний самопроизвольно нарастают до значений, которые во много раз превышают равновесные. В таких случаях длина свободного пробега определяется рассеянием на колебаниях. Такие плазмы обладают аномальными свойствами.

С введением понятия «длина свободного пробега» удобно еще раз вернуться к разделению плазм на идеальные и неидеальные. Условия идеальности  $nr_D^3 \gg 1$  можно переписать так:  $\omega_p l / v_{Te} \gg 10$ . Это условие означает, что за время одного периода колебания столкновений практически не происходит. В случае неидеальной плазмы столкновения становятся столь частыми, что колебания затухают слишком быстро и само понятие колебаний теряет смысл.

Подведем некоторые итоги. С помощью проведенного выше анализа мы попытались включить взаимодействие заряженных частиц в плазме в рамки элементарной кинетической теории газов, заменяя плавно изгибающиеся траектории электронов и ионов условными ломаными линиями и сводя статистический эффект многих слабых столкновений к одному условному сильному удару. Польза от применения таких не очень корректных методов заключается в том, что имея формулы для средней длины свободного пробега, среднего времени между ударами и т. д., можно оперировать наглядными картинками при анализе основных физических процессов в плазме. Существует, однако, вполне корректный метод анализа кулоновского взаимодействия частиц в плазме, основанный на использовании математического аппарата теории кинетических уравнений.

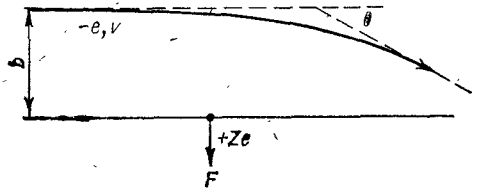


Рис. 1.4. Траектория электрона при кулоновском рассеянии на ионе

Остановимся теперь на вопросе об обмене тепловой энергией между электронами и ионами в плазме. Рассмотрим сначала самый простой случай. Пусть быстрый электрон с импульсом  $m_e v_e$  пролетает мимо неподвижного иона и испытывает рассеяние на угол  $\theta$ , при этом иону передается импульс  $2m_e v_e \sin(\theta/2)$  (рис. 1.4). Под действием этого импульса ион приходит в движение, приобретая кинетическую энергию

$$\Delta w_i = (1/2m_i) (2m_e v_e \sin(\theta/2))^2.$$

Чтобы найти энергию, которую быстрый электрон передает неподвижным ионам за единицу времени, нужно умножить  $\Delta w$  на  $v_e f(\theta) d\Omega$  и проинтегрировать по углам:

$$-dw_e/dt = (4\pi n_e^4 / m_i v_e) L_K \quad (1.14)$$

(предполагается, что ионы имеют единичный заряд). Выражение для передаваемой энергии преобразуем следующим образом:

$$(4\pi n_e^4 / m_i v_e) L_K = 2(m_e / m_i) v_{ei} w_e. \quad (1.15)$$

Здесь  $v_{ei}$  — число столкновений между электроном с кинетической энергией  $w_e$  и неподвижными ионами в единицу времени. Относительная доля энергии, теряемая в среднем при одном столкновении, составляет  $2m_e / m_i$  (как и следовало ожидать для наглядной модели упругого удара двух шаров). Среднее значение энергии  $Q_{ei}$ , которую электрон плазмы передает ионам за 1 с, получается из (1.14) интегрированием по максвелловскому распределению по скоростям:

$$Q_{ei} = (1,2 \cdot 10^{-17} / A) (n / (T_e^{\circ})^{1/2}). \quad (1.16)$$

Здесь  $A$  — атомная масса ионизованного газа. Указанная формула справедлива только при  $T_e \gg T_i$ ; если  $T_e$  и  $T_i$  одного порядка, то выражение (1.16) должно быть заменено на следующее:

$$Q_{ei} \approx (1,2 \cdot 10^{-17} / A) n (T_e^\circ - T_i^\circ) / (T_e^\circ)^{3/2}. \quad (1.17)$$

Для того чтобы получить представление о степени эффективности теплообмена между электронами и ионами плазмы, обратимся к конкретному примеру. Пусть температура электронов в водородной плазме поддерживается на уровне  $10^6$  К при концентрации  $n = 10^{13}$  см $^{-3}$ . Чтобы нагреть ионы от нулевой температуры до  $T_i = T_e / 2$ , при этих условиях потребуется 1,2 мс. Заметим, что результат такого вычисления имеет смысл только в том случае, если в течение рассматриваемого промежутка времени ионы сохраняют всю приобретаемую ими энергию. Ион с энергией, соответствующей температуре в несколько сот тысяч градусов, за 1 мс проходит примерно 100 м. Для того чтобы в этих условиях ионная компонента могла нагреваться, необходима эффективная термоизоляция плазмы.

Если тепловая скорость электронов значительно превышает тепловую скорость ионов, то формула (1.17) остается справедливой и при  $T_i > T_e$ , т. е. в том случае, когда происходит нагрев электронов более горячей ионной компонентой. Перепишем для этого случая указанную формулу в виде

$$Q_{ie} = (1,2 \cdot 10^{-17} / A) n (T_i^\circ - T_e^\circ) / (T_e^\circ)^{3/2}, \quad (1.17a)$$

где  $Q_{ie} = -Q_{ei}$  — энергия, передаваемая от ионов к электронам в единице объема за 1 с. Однако если в плазме с холодными электронами присутствуют настолько горячие ионы, что  $v_i \gg v_e$ , то скорость теплообмена может значительно возрасти. Рассуждая так же, как и при выводе формулы (1.14), при указанном условии приходим к следующей формуле для теплопередачи:

$$Q_{ie} = (4\pi n e^4 / m_e v_i) L_K, \quad (1.18)$$

или после интегрирования по максвелловскому распределению ионов

$$Q_{ie} = 2,2 \cdot 10^{-14} n / (T_i^\circ)^{1/2}. \quad (1.18a)$$

Одной из основных характеристик вещества служит уравнение состояния, т. е. соотношение между давлением, плотностью и температурой. Для классической плазмы с изотропным распределением по скоростям заряженных частиц уравнение состояния имеет тот же вид, что и для идеального газа с двумя компонентами:  $p = n(T_e + T_i)$ . Здесь  $p$  — давление плазмы, равное сумме электронного и ионного давлений. Как уже указывалось выше, эта формула справедлива для случаев, когда  $nr^3_D \gg 1$ .

Обычно предполагается, что распределение частиц газа по энергиям подчиняется закону Максвелла. По отношению к плазме это предположение нельзя считать бесспорным. Максвелловский

энергетический спектр устанавливается в результате столкновений между частицами газа. Для того чтобы в данном коллективе частиц при произвольном начальном энергетическом распределении установилось распределение по Максвеллу для широкой области энергий, т. е., чтобы успел «отрасти» максвелловский «хвост», содержащий частицы с энергией  $\omega > T$ , должно пройти время, за которое частицы должны испытать в среднем по несколько столкновений друг с другом. Причем речь идет о столкновениях идентичных частиц. В частности, максвелловское распределение по энергиям у электронов практически установится за промежуток времени, примерно в десять раз превышающий среднее время  $\tau_{ee}$  между двумя электрон-электронными столкновениями. В ионной компоненте максвелловское распределение устанавливается после десятка ион-ионных соударений. Следовательно, при  $T_i \sim T_e$  «максвеллизация» у ионов происходит гораздо медленнее, чем у электронов (в отношении  $(m_e/m_i)^{1/2}$ ). Необходимо отметить, что в каждой из компонент плазмы процесс максвеллизации, который идет из-за столкновений между идентичными частицами, протекает быстрее, чем установление теплового равновесия между обеими компонентами. Поэтому в плазме электроны и ионы могут быть распределены по Максвеллу, но при двух различных значениях температуры. Кроме того, если время жизни заряженных частиц плазмы мало, то у ионной компоненты в области энергий, во много раз превышающих температуру ионов, энергетическое распределение может резко отличаться от максвелловского (число таких быстрых ионов во много раз меньше, чем это следует по закону Максвелла, если нет каких-либо механизмов ускорения).

### § 1.5. Явления переноса в плазме

С помощью понятий длины свободного пробега, времени пролета или частоты столкновений можно уже сейчас построить качественную теорию процессов переноса в плазме, таких как диффузия, теплопроводность, электропроводность и т. п.

Движение каждой заряженной частицы в плазме носит случайный диффузионный характер, которому можно сопоставить коэффициент диффузии:  $D \sim v^2 \tau$ . Макроскопический смысл могла бы иметь диффузия электронов слабоионизованной плазмы, в которой роль рассеивающих центров играют нейтральные частицы.

Если температура плазмы неоднородна, то в процессе такого диффузионного движения происходит перенос тепла, описываемый обычным уравнением теплопроводности с коэффициентом температуропроводности  $\chi$ , который по физическому смыслу получается умножением коэффициента диффузии на теплоемкость:  $\chi \approx Dc$ .

Отсюда видно, что коэффициент теплопроводности для полностью ионизованной плазмы прямо пропорционален  $T^{5/2}$ . Правильное значение численного коэффициента определяется строгой кинетической теорией. В связи с тем, что в плазме существуют раз-



смотрим поведение электрона, принадлежащего к далекому хвосту максвелловского распределения  $\omega_e \gg T_e$ . Приращение скорости, приобретаемое электроном в промежутке между двумя «столкновениями» с ионами, пропорционально  $\tau_{ie}$  и, следовательно, растет как  $v^3$ . Поэтому если скорость теплового движения  $v$  у выбранного нами электрона достаточно велика, то приращение скорости  $u$  может оказаться того же порядка, что и  $v$ , или даже превысит ее. При такой ситуации неприменима упрощенная модель процесса, в которой считается, что электрон набирает на длине пробега относительно небольшую упорядоченную скорость и полностью теряет ее при мгновенном сильном ударе. В действительности ускорение и торможение электрона происходят одновременно. В то время как электрон приобретает упорядоченную скорость, резерфордское рассеяние на ионах постепенно изменяет направление его движения. Электрическое поле стремится распрямить траекторию, в то время как взаимодействие с ионами изгибает ее. Если прирост упорядоченной составляющей скорости не компенсируется рассеянием, то равновесие сил не может установиться и электрон должен перейти в состояние непрерывного ускорения, при котором его энергия будет все время возрастать. С увеличением энергии сила торможения падает, и поэтому электрон, вовлеченный в процесс непрерывного разгона полем, будет продолжать ускоряться, пока он находится в области действия поля. В состоянии разгона полем переходят те электроны плазмы, которые успевают набрать на длине свободного пробега дополнительную скорость  $u$ , превышающую их начальную скорость. Указанное условие разгона можно записать в виде

$$eE\tau_{ei}/m_e > v. \quad (1.25)$$

Поскольку  $\tau_{ei}$  пропорционально  $v^3/n$ , то из (1.25) следует, что непрерывное ускорение происходит в том случае, когда  $E\omega_e/n$  превышает некоторое граничное условие. Как нетрудно убедиться, для водородной плазмы это граничное значение порядка  $3 \cdot 10^{-12}$ , если  $E$  измеряется в вольтах на сантиметр, а  $\omega_e$  — в электронвольтах. В экспериментах с плазмой условие (1.25) обычно удовлетворяется только для электронов с энергией, во много раз превышающей  $T_e$ . Эти электроны составляют очень небольшую долю всей электронной компоненты. Поскольку в указанном случае основной вклад в электрический ток дают составляющие большинство тепловые электроны плазмы, закон Ома верен с высокой точностью. Однако наряду с обычным током проводимости в плазме будет существовать дополнительный ток ускоренных электронов, для которого закон Ома не применим. При большом значении отношения  $E/n$  условие (1.25) будет выполняться также и для электронов со средней тепловой скоростью. В этом случае в процесс непрерывного ускорения может перейти основная часть электронной компоненты плазмы, и тогда закон Ома должен резко нарушиться, так как, вообще говоря, мы имеем дело с нестационарным процессом ускорения электронов. Расчет показывает, что процесс элект-

тронного разгона заметно развивается тогда, когда отношение среднего значения  $u$  для плазмы в целом к средней тепловой скорости электронов становится больше одной десятой. Отношение  $u/v_e$  растет пропорционально  $v_e^2$ , и поэтому если для электронов со средней тепловой энергией  $\omega_e = T_e$   $u/v_e = 0,1$ , то для электронов с энергией  $10T_e$   $u$  сравнивается по значению с  $v_e$ , и такие электроны оказываются близкими к порогу непрерывного ускорения. Переход электронов в состояние непрерывного ускорения можно наблюдать в кольцевых электрических разрядах, когда плазма образуется внутри тороидальной камеры и ускоряется вихревым электрическим полем. В экспериментах такого рода при некоторых условиях действительно наблюдается разгон определенной (относительно небольшой) группы электронов плазмы до очень высокой энергии при сравнительно небольших напряжениях на плазменном витке.

Более глубокий анализ поведения потоков разогнанных электронов показывает, что такие потоки способны возбуждать и раскачивать в плазме различные колебания и волны, передавая им всю энергию или заметную часть ее. В результате этого появляется новый механизм торможения ускоренных частиц, прекращающий разгон после того, как электроны плазмы наберут определенную порцию избыточной энергии направленного движения. Этот автоматический механизм не позволяет всем электронам плазмы перейти в состояние непрерывного ускорения. Ясно, что электропроводность плазмы в указанном случае нельзя вычислять по формуле (1.22) и что торможение электронов при взаимодействии с волнами должно приводить к увеличению сопротивления. К настоящему времени накоплен большой экспериментальный материал по аномалии электропроводности плазмы в сильном электрическом поле. Однако для его анализа требуется привлечь более глубокие и детальные представления нелинейной теории плазменных неустойчивостей (см. § 2.19). При высокой плотности плазмы и относительно небольшой напряженности электрического поля найденные экспериментально значения в пределах погрешностей измерений совпадают со значениями, определенными по формуле (1.23).

## § 1.6. Плазма в высокочастотном поле

Своеобразные свойства плазмы выступают очень отчетливо в том случае, когда рассматривается ее поведение под действием электрического поля высокой частоты. В этих условиях существенную роль начинает играть механическая инерция электронов. Рассмотрим простейший случай. Пусть в плазме действует электрическое поле  $E$ , напряженность которого равна  $E_0 \exp(-i\omega t)$ . Если частота настолько велика, что за время одного периода изменения поля у отдельного электрона вероятность столкновения с ионами достаточно мала, то, рассматривая движение электронов, можно в первом приближении пренебречь силой торможения.

сравнению  $\omega \gg v_e$ . Действительно, для нижней границы частот

$$x = 1 - \omega_p^2 / \omega (\omega + i\nu_e). \quad (1.36)$$

Используя (1.33) и (1.34), находим

$$x = (e/m_e \omega (\omega + i\nu_e)) E_0 \exp(-i\omega t),$$

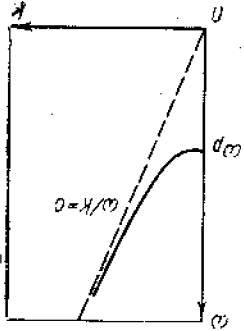
$$m_e x = -e E_0 \exp(-i\omega t) - m_e x / \tau_e,$$

то для смещения  $x$  получаем

силу трения электронов и ионов

жесткая для электронов в поле волны учесть часть. Действительно, если в уравнении дипольности учесть этого эффекта дает минимум. В формуле для диэлектрической проницаемости электронов, вызванное столкновение тропических волн в такой плазме — это тор-венный очевидный механизм затухания элект-зона с такими волнами. Поэтому единст-нет частиц, которые могли бы находиться в ре-скорость света в вакууме и, следовательно, рост волн  $\omega/k = c / (1 - \omega_p^2 / \omega^2)^{1/2}$  превышает ното поля, отсутствует явление «затухания странственно-однородной плазме без магнит-магнитных волн, распространяющихся в про-ных волн приведена на рис. 1.5. Для электро-

Рис. 1.5. Дисперсионная кривая электро-магнитных волн в плазме



Дисперсионная кривая для электромагнит- $k = 2\pi/\lambda$  равно  $k = N\omega/c = (\omega/c) (1 - \omega_p^2 / \omega^2)^{1/2}$ . казать преломления  $N = \sqrt{\epsilon} = (1 - \omega_p^2 / \omega^2)^{1/2}$ , а волновое число тропических волн с частотой, меньшей  $\omega_p$ . Следовательно, элект-на которого следует, что в плазме не могут распространяться элект-

$$\epsilon = 1 - \omega_p^2 / \omega^2, \quad (1.35)$$

ное выражение

где  $x$  — смещение электронов (смещением ионов можно пренеб-речь, так как оно очень мало). Из (1.32) и (1.34) находим извест-

$$F = -m_e x, \quad (1.34)$$

в плазме

$$\epsilon = 1 + 4\pi P / E, \quad (1.33)$$

сма  $F$  с помощью известной формулы выразить через величину электрического момента единицы объ-ская проницаемость  $\epsilon > 1$ . Диэлектрическую проницаемость можно вещества направлена против поля и, следовательно, диэлектриче-ду силой, действующей на заряд, и его смещением поляризация обычных твердых диэлектриков. При сдвиге по фазе на  $180^\circ$  меж-тивополюсний тому, с которым мы встречаемся, изучая поведение сильно действующей силы ( $F = -eE$ ) на  $180^\circ$ . Это случай, про-Из (1.32) следует, что смещение электрона сдвинуто по фазе отно-

Уравнение движения в этом случае имеет вид

$$(1.26) \quad m^* \ddot{x} = -eE_0 \exp(-i\omega t),$$

где  $x$  — координата в направлении электрического поля. Интегрируя (1.26), получаем

$$(1.27) \quad u_x = \dot{x} = (eE_0/m^* \omega) \exp(-i\omega t).$$

Следовательно,

$$(1.28) \quad i = -en u_x = -ne^2 E / m^* \omega.$$

Полученное соотношение можно записать в следующей форме:

$$(1.29) \quad E = (-im^* \omega / ne^2) i.$$

Таким образом, высокочастотное напряжение сдвинуто по фазе на  $90^\circ$  назад по сравнению с током. Это означает, что в высокочастотном поле плазма обладает собственной «немагнитной» индуктивностью, которая обусловлена инерцией электронов. При низких концентрациях немагнитная индуктивность плазменного проводника может превосходить его обычную («магнитную») индуктивность. Выясним условия, при которых это может иметь место. Для цилиндрического плазменного проводника с радиусом  $a$  магнитная индуктивность на единицу длины в единицах СИСЭ равна

$$(1.30) \quad (1/\omega) |E| = (1/na^2 \omega) |E|||.$$

(1.30)

Обычная индуктивность (коэффициент самоиндукции) в единицах СИСЭ для проводника длиной  $l$  см порядка единицы; в СИСЭ она составляет величину порядка  $1/c^2$ . Следовательно, для плазмы будет порядка  $10^{-12}$  —  $10^{-13}$ , где  $10^{-12}$  — число электронов на  $1$  см плазменного проводника. Эта величина имеет очень простой смысл. Она равна полному числу электронов, которые находятся внутри отрезка плазменного проводника длиной, равной классическому радиусу  $r_0 = e^2/mc^2$ . Формулу (1.29), связывающую плотность тока с напряженностью высокочастотного поля, можно обозначить, если учесть торсионные электроны, выведенное соотношение

$$(1.31) \quad E = i((1/\sigma) - i\omega L_0).$$

(1.31)

Здесь  $L_0 = m^* l / ne^2$  — немагнитная индуктивность. Такой характер движения электронов и переносимого ими тока под действием высокочастотного электрического поля играет решающую роль в формировании диэлектрических свойств плазмы. В рассмотренном выше простейшем случае, когда в плазме существует электрическое поле  $E_0 \exp(-i\omega t)$ , ускорение электронов  $\ddot{x}$  и его скорость определяются выражениями (1.26) и (1.27). Интегрируя по времени еще раз, находим смещение

$$(1.32) \quad x = (e/m^* \omega^2) E_0 \exp(-i\omega t).$$

(1.32)

Подставляя в правую часть этого соотношения  $\delta z$  и проводя усреднение по быстрым колебаниям, вновь приходим к формуле (1.40) для силы высокочастотного давления. Эта сила обращается в нуль для любой плоской волны, во всех других случаях она отлична от нуля и приводит к вытеснению плазмы из областей, занятых вы-

$$\langle F_z \rangle = -(e/2) \langle \delta z \rangle (\partial E_z / \partial z) \exp(-i\omega t) + \text{к. с.} \quad (1.41)$$

и медленного смещения под действием силы, усредненной по быст-

$$\delta z = -(e/2m\omega^2) \exp(-i\omega t) + \text{к. с.} \quad (1.41)$$

в виде суммы быстрых колебаний

$$F = -(e/2) [E \exp(-i\omega t) + \delta z (\partial E / \partial z) \exp(-i\omega t)] + \text{к. с.}$$

действующую на электроны силу можно представить в виде

Ограничиваясь членами, квадратичными по амплитуде поля, в первом порядке электрического поля. Эта формула получена для стокней монохроматической электро- магнитной волны, однако в действительности она имеет достаточно универсальный характер. В частности, такая же формула для вы- сокочастотного давления получается при рассмотрении движения электронов в неоднородном продольном электрическом поле ко- нечной амплитуды:  $E_z = (1/2) E_0(z) \exp(-i\omega t) + \text{к. с.}$  Пусть частицы колеблются около точки  $z_0$  в поле с амплитудой, возрастающей в сторону увеличения  $z$ . При колебательном движении сила на- направлена против смещения. Поэтому когда электрон смещается влево, на него действует возвращающая сила большей величины, чем при смещении направо. В итоге возникает результирующая си- ла, действующая в сторону уменьшения  $z$ , т. е. в направлении, об- ратном направлению электрического поля.

$$F_{\text{вн}} = (e^2 n / 4m\omega^2) E^2(z). \quad (1.40)$$

равно

Высокочастотное давление, создаваемое электромагнитной волной,

$$F_z = -\partial p_{\text{вн}} / \partial z. \quad (1.39)$$

дента электрического поля:

Это уравнение означает, что в поле электромагнитной волны с про- странственно неоднородной амплитудой на электроны плазмы дей- ствует сила высокочастотного давления, направленная против гра-

$$m \ddot{z} = -(e^2 / 4m\omega^2) (E \partial E^* / \partial z + \text{к. с.}) = -(e^2 / 4m\omega^2) \partial |E|^2 / \partial z. \quad (1.38)$$

Движение уравнение для медленного движения электронов по осн  $z$ :

где величина  $n(z)$  определяется формулой (1.27). Проведем в правой части (1.37) усреднение по быстрым колебаниям, получим сле-

$$n = (1/2) n(z) \exp(-i\omega t) + \text{к. с.},$$

вторая величина, и представили ее в виде

$$m_e z = -(e/c) n H_y = -(1/4) (e/c) n \exp(-i\omega t) + \text{к. с.} \quad (1.37) \times$$

Уравнение движения электронов вдоль оси  $z$  имеет вид

$$r = (1/2) x \exp(-i\omega t) + z(t) + \text{к. с.}$$

Медленным смещением вдоль неоднородности:

плазмы в волне конечной амплитуды участвуют в двух движениях — быстрых колебаниях в направлении электрического поля и медленном смещении вдоль неоднородности:

$$\text{rot } \mathbf{E} = -(1/c) \partial \mathbf{n} / \partial t.$$

Вытекающим из уравнения Максвелла:

$$dE_x/dz = i(\omega/c) H_y.$$

Амплитуды полей связаны соотношением

Здесь к. с. означает сложное, комплексно сопряженное первому.

$$H_y = (1/2) H_y(z) \exp(-i\omega t) + \text{к. с.}$$

$$E_x = (1/2) E_x(z) \exp(-i\omega t) + \text{к. с.}$$

(ось  $z$ ):

в плоскости, перпендикулярной к направлению неоднородности

волну. В такой волне электрическое и магнитное поля лежат

Рассмотрим для определенности стоячую электромагнитную

электроны плазмы стремятся перемещаться к минимуму поля.

гелное высокочастотное движение  $p_{\text{э}} \sim m_e v$ , в результате чего

колебания электронов со скоростью  $v(t)$ , создает как бы дополни-

шим образом. Электромагнитное поле, вызывая высокочастотные

ным полем. Физика такого вытеснения можно объяснить следу-

теснению электронов плазмы из областей, занятых электромаг-

нитной волной с пространственно неоднородной амплитудой к вы-

теснению электронов плазмы из областей, занятых электромаг-

нитной волной с пространственно неоднородной амплитудой к вы-

теснению электронов плазмы из областей, занятых электромаг-

нитной волной с пространственно неоднородной амплитудой к вы-

теснению электронов плазмы из областей, занятых электромаг-

нитной волной с пространственно неоднородной амплитудой к вы-

теснению электронов плазмы из областей, занятых электромаг-

нитной волной с пространственно неоднородной амплитудой к вы-

теснению электронов плазмы из областей, занятых электромаг-

$$\varepsilon = 1 - \omega_p^2 / \omega^2 + i\omega_p^2 \nu_e / \omega^3 \quad (1.36a)$$

членами разложения в ряд по величине  $\nu_e / \omega$ :

стационарной степени точности можно представить двумя первыми

плазмы  $n^2 \gg 1$ , см § 1.3. По этой причине формулу (1.36) с до-

стационарной степени точности можно представить двумя первыми

плазмы  $n^2 \gg 1$ , см § 1.3. По этой причине формулу (1.36) с до-

стационарной степени точности можно представить двумя первыми

плазмы  $n^2 \gg 1$ , см § 1.3. По этой причине формулу (1.36) с до-

стационарной степени точности можно представить двумя первыми

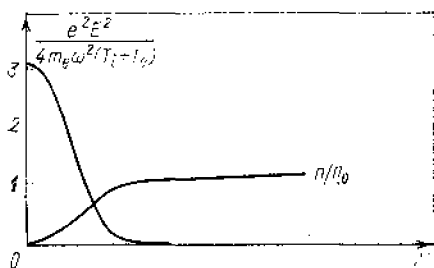


Рис. 1.6. Действие давления электромагнитной волны на плазму

электронны плазмы смещаются в область, свободную от электромагнитного поля (рис. 1.6). При этом возникает поляризационное электрическое поле, в результате чего ионы смещаются вслед за электронами. Уравнения, описывающие равновесие плазмы с электромагнитным полем, можно записать в виде

$$-eE_0 - (e^2/4m_e\omega^2)\partial E^2/\partial z - (1/n)\partial nT_e/\partial z = 0; \quad (1.42)$$

$$eE_0 - (1/n)\partial nT_i/\partial z = 0. \quad (1.43)$$

(Здесь мы пользовались условием квазинейтральности  $n_e = n_i$ .) Из этих уравнений имеем

$$n = n_0 \exp\{-e^2|E|^2/4m_e\omega^2(T_e + T_i)\}.$$

$$eE_0 = -e^2|E|^2T_i/4m_e\omega^2(T_e + T_i),$$

где  $n_0$  — невозмущенная плотность при  $E \rightarrow 0$ . Таким образом, достаточно мощную электромагнитную волну

$$e^2|E|^2/m_e\omega^2 \gg T_e + T_i$$

действительно можно использовать для удержания плазмы.

### § 1.7. Проникновение электромагнитной волны в плазму. Трансформация в плазменные колебания

Поскольку при  $\omega < \omega_p$  диэлектрическая проницаемость плазмы отрицательна, электромагнитные волны в такую плазму не могут проникать больше, чем на глубину скин-слоя. Оказывается, в некоторых случаях внутри этого тонкого слоя толщиной порядка  $c/\omega_p$  с электромагнитной волной могут происходить поистине драматические события. Их проще всего понять, если рассматривать распространение электромагнитной волны в неоднородной плазме, плотность и диэлектрическая проницаемость которой зависят от пространственной координаты. Будем считать, что плотность монотонно нарастает в глубь плазмы (вдоль  $z$ ). Пусть в такой плазме под углом к оси  $z$  распространяется электромагнитная волна.

Если плотность плазмы меняется достаточно медленно в масштабах длины волны, т. е. выполнено условие  $\omega L/c \gg 1$ , где  $L$  — характерный пространственный масштаб изменения плотности, то задачу о распространении электромагнитной волны всюду, за исключением особых точек, можно решать в приближении геометрической оптики. В этом приближении волновое поле, как и в однородной среде, можно искать в виде плоской волны, учитывая, однако, что  $z$ -составляющая волнового вектора и амплитуда волны медленно меняются с расстоянием:

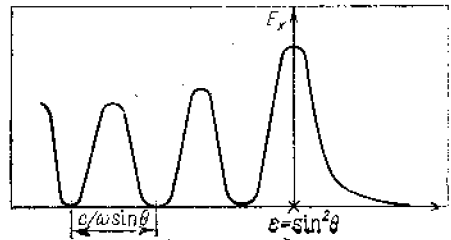


Рис. 1.7. Пространственное распределение электрического поля электромагнитной волны в неоднородной плазме вблизи «точки отражения»

$$E, H = (\text{const}/k_z^{1/2}) \exp \left\{ i \int k_z dz + i k_y y - i \omega t \right\}. \quad (1.44)$$

Для простоты предположим, что волновой вектор лежит в плоскости  $yz$  (плоскость падения). Дисперсионное уравнение этой волны имеет такой же вид, как и в однородном случае:

$$k_z^2 + k_y^2 = (\omega^2/c^2) \epsilon. \quad (1.45)$$

Слева от области, занятой плазмой, т. е. в вакууме, это уравнение, очевидно, переходит в следующее:  $k^2 = \omega^2/c^2$ . Поскольку  $k_y^2 = k^2 \sin^2 \theta$ , то дисперсионное уравнение в общем случае можно записать так:

$$k_z^2 = (\omega^2/c^2) (\epsilon - \sin^2 \theta).$$

Точка  $\epsilon = \sin^2 \theta$  называется точкой поворота волны. Структура поля вблизи точки поворота показана на рис. 1.7. Слева от точки поворота осцилляторная структура стоячей электромагнитной волны — результат наложения падающей и отраженной электромагнитных волн. Справа от точки отражения поле экспоненциально затухает в глубь плазмы. Более детально структуру поля можно найти, решив уравнения Максвелла:

$$\left. \begin{aligned} \text{rot } E &= i(\omega/c) \mathbf{H}; \\ \text{rot } \mathbf{H} &= -i\epsilon(\omega/c) \mathbf{E}. \end{aligned} \right\} \quad (1.46)$$

Здесь  $\epsilon$  — функция координат. Подставляя  $\mathbf{H}$  из первого уравнения во второе, получаем следующее уравнение для  $\mathbf{E}$ :

$$\Delta \mathbf{E} + \epsilon(\omega^2/c^2) \mathbf{E} - \text{grad div } \mathbf{E} = 0. \quad (1.47)$$

Аналогичным образом исключая  $\mathbf{E}$ , находим уравнение для  $\mathbf{H}$ :

$$\Delta \mathbf{H} + \epsilon(\omega^2/c^2) \mathbf{H} + (1/\epsilon) [\nabla \epsilon, \text{rot } \mathbf{H}] = 0. \quad (1.48)$$



При исследовании структуры поля будем различать два независимых случая поляризации волн: S-поляризацию, когда электрический вектор перпендикулярен к плоскости падения, т. е. в рассматриваемом случае направлен вдоль оси  $x$ , и P-поляризацию, когда электрический вектор лежит в плоскости падения  $yz$ , а по оси  $x$  направлено магнитное поле волны.

Наиболее просто рассматривается случай S-поляризации, когда уравнение (1.47) для электрического поля можно представить в виде

$$\partial^2 E / \partial z^2 + (\omega^2 / c^2) (\varepsilon - \sin^2 \theta) E = 0. \quad (1.49)$$

Достаточно далеко от точки поворота  $\varepsilon = \sin^2 \theta$  решение этого уравнения можно получить в приближении геометрической оптики; оно совпадает с формулой (1.44), структура поля в этом случае соответствует структуре, изображенной на рис. 1.7.

Для того чтобы получить решение вблизи точки поворота, надо задаться конкретной зависимостью  $\varepsilon$  от координаты. Будем считать, что в этой области плотность плазмы меняется по линейному закону  $n = n_0(1 + z/L)$  (здесь  $n_0$  — плотность электронов в точке, где плазменная частота совпадает с частотой волны). В этом случае уравнение (1.49) приводится к знаменитому уравнению Эйри:

$$\partial^2 E / \partial z'^2 - (\omega^2 / c^2) (z' / L) E = 0, \quad (1.50)$$

где  $z' = z - L \sin^2 \theta$ . Решение этого уравнения, не имеющее особенности в точке  $z' = 0$ , выражается через хорошо известную функцию Эйри. Достаточно далеко от точки  $z' = 0$  асимптотика этой функции совпадает с решением, полученным в приближении геометрической оптики [см. формулу (1.44) с  $k^2 z = -(\omega^2 / c^2) (z' / L)$ , осцилляции имеют место слева от точки  $z' = 0$ , экспоненциальное спадание — справа от точки  $z' = 0$ ].

Рассмотрим теперь волну P-поляризации, у которой есть составляющая электрического поля в направлении неоднородности и с которой связаны обещанные в начале § 1.7 драматические события. Дело в том, что в окрестности точки  $z = 0$ , где осуществляется резонанс  $\omega = \omega_p$ , упомянутая выше компонента  $E_z$  электрического поля падающей электромагнитной волны, казалось бы, могла раскачивать продольные (ленгмюровские) плазменные колебания. Для того чтобы убедиться, что эта «степень свободы» действительно реализуется, обратим внимание на неизбежность разделения зарядов, так как под действием нормальной компоненты электрического поля  $E_z$  возникает движение электронов в направлении неоднородности плотности. Рассмотрим детально поведение амплитуд поля в окрестности точки  $z = 0$ . Воспользовавшись  $z$ -компонентой второго из уравнений Максвелла (1.46), нетрудно найти, что амплитуда продольного поля определяется соотношением

$$\varepsilon E_z \approx H_x(0) \sin \theta. \quad (1.51)$$

Анализ поведения магнитного поля можно провести, основываясь на уравнении (1.48), которое в данном случае ( $\mathbf{H}$  параллельно оси  $x$ ,  $\epsilon$  зависит только от  $z$ ) запишем в следующем виде:

$$\frac{\partial^2 H}{\partial z^2} - (1/\epsilon) (\partial \epsilon / \partial z) (\partial H / \partial z) + (\omega^2 / c^2) (\epsilon - \sin^2 \theta) H = 0. \quad (1.52)$$

Из этого уравнения следует, что точка отражения волны  $P$ -поляризации также определяется условием  $\epsilon = \sin^2 \theta$ . После прохождения точки отражения  $z = -L \sin^2 \theta$  магнитное поле волны экспоненциально спадает с характерным размером, имеющим порядок  $c/\omega \sin \theta$ .

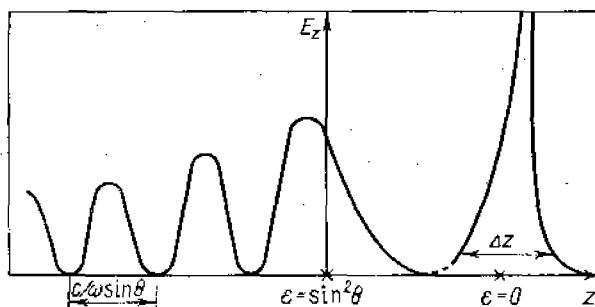


Рис. 1.8. Пространственное распределение электрического поля электромагнитной волны в неоднородной плазме вблизи точки «плазменного резонанса» и явление трансформации электромагнитной волны в плазменную

Точное решение уравнения (1.52), которое оказывается несколько более сложным, чем уравнения Эйри, показывает, что магнитное поле не испытывает никакой аномалии в точке плазменного резонанса  $z=0$  и в формуле (1.51) магнитное поле можно считать постоянным. Тогда электрическое поле в точке  $z=0$  будет иметь особенность порядка  $1/\epsilon$ . Структура электрического поля в случае  $P$ -поляризации показана на рис. 1.8. Тонкий слой вблизи особенности можно рассматривать как своеобразный конденсатор, в котором происходит накопление энергии до бесконечно большой величины при пренебрежении диссипацией (столкновениями) и пространственной дисперсией, которая, как известно, соответствует выносу энергии плазменной волны.

Для того чтобы описанный здесь эффект был замечен, необходимо, чтобы точка отражения и точка плазменного резонанса не были разнесены в пространстве слишком далеко. Условие проникновения электромагнитной волны в область плазменного резонанса запишем в виде  $|k_z z| \sim 1$ , где  $z = L \sin^2 \theta$  — расстояние между точкой отражения и точкой плазменного резонанса. Подставляя сюда  $k_z \sim (\omega/c) \sin \theta$ , получаем, что электромагнитная волна проникает

в область резонанса при углах падения, близких к нормальному:

$$\theta \sim (c/\omega L)^{1/3} \ll 1.$$

Однако  $\theta$  не может обратиться в нуль (нормальное падение), так как в этом случае вообще отсутствует продольное электрическое поле.

Расходимость поля  $E_z$  в точке  $z=0$  отсутствует, если учесть реальные эффекты — столкновения или раскачку продольных плазменных колебаний. Для того чтобы учесть раскачку продольных колебаний, необходимо ввести поправку к частоте, возникающую из-за теплового движения [см. уравнение (1.36)].

Рассмотрим сначала более простую задачу, когда особенность в точке резонанса снимается столкновениями. Используя выражение (1.36a) для диэлектрической проницаемости плазмы при наличии соударений, найдем, что амплитуда продольного электрического поля определяется соотношением

$$E_z = H_x(0) \sin \theta / (-z/L - i\nu/\omega). \quad (1.53)$$

Отсюда следует, что диссипация ограничивает продольное электрическое поле на уровне

$$E_{\text{макс}} \approx H_x(0) \sin \theta \omega / \nu. \quad (1.54)$$

Такое поле достигается в области шириной

$$\Delta z \sim L\nu/\omega. \quad (1.55)$$

Во всех приведенных выше формулах  $H_x(0)$  — это магнитное поле в окрестности особенности. Для того чтобы связать его с амплитудой падающей волны  $H$ , необходимо решить уравнение (1.52). Мы не будем проводить здесь строгое решение этого уравнения и приведем лишь окончательный результат:

$$\sin \theta H_x(0) = H(c/\omega L)^{1/2} \Phi(\tau) / (2\pi)^{1/2}, \quad (1.56)$$

где  $\tau = (\omega L/c)^{1/2} \sin \theta$ . График  $\Phi(\tau)$  приведен на рис. 1.9, при больших  $\tau$  в соответствии с проведенным выше рассмотрением функция  $\Phi(\tau)$  экспоненциально спадает.

Рис. 1.9. График функции  $\Phi(\tau)$

Теперь можно вычислить коэффициент поглощения электромагнитной волны в окрестности плазменного резонанса. Очевидно, что такой коэффициент поглощения определяется отношением мощности диссипации в окрестности резонанса к потоку энергии в падающей волне, который, в свою очередь, определяется вектором Пойнтинга и равен  $cH^2/8\pi$ . Основной вклад в диссипацию, очевидно, обусловлен продольным электрическим полем. Тогда поглощаемая мощность равна

$$P = \nu \int (|E_z|^2 / 8\pi) dz.$$

Подставляя в этот интеграл формулу (1.53) для пространственной структуры продольного электрического поля в окрестности плазменного резонанса, получаем следующее уравнение для скорости поглощения:

$$P = (1/8\pi) H_x^2(0) \sin^2 \theta \int \frac{v}{z^2/L^2 + v^2/\omega^2} dz \equiv \\ \equiv (1/8\pi) H_x^2(0) \sin^2 \theta \omega^2 \int v dz / [(\omega - \omega_p(z))^2 + v^2]. \quad (1.57)$$

В пределе малых  $v$  подынтегральное выражение является одним из известных представлений  $\delta$ -функций, а именно

$$\lim_{v \rightarrow 0} \frac{v}{(\omega - \omega_p(z))^2 + v^2} = \pi \delta(\omega - \omega_p(z)).$$

Наличие этой  $\delta$ -функции подчеркивает резонансный характер поглощения — диссипация электромагнитной энергии происходит только в узком слое плазмы, где плазменная частота совпадает с частотой падающей волны. В этом случае частота столкновений определяет только ширину резонансного слоя  $\Delta z$  [см. (1.55)], а скорость поглощения от  $v$  не зависит. Это обстоятельство можно пояснить иначе:  $P \sim v E_{\text{макс}}^2 \Delta z$ ,  $E_{\text{макс}} \sim 1/v$  [см. (1.54)],  $\Delta z \sim v$ , следовательно,  $P$  не зависит от  $v$ . Иначе говоря, роль  $v$  является, в известном смысле, символической.

Следует заметить, что при дальнейшем рассмотрении свойств плазмы нам довольно часто придется сталкиваться с резонансными явлениями [черепковский резонанс волн и частиц  $\omega = kv$  (см. § 1.12), резонанс на плазменной частоте в спектре поляризационных потерь заряженной частицы (см. § 1.8)]. Все эти резонансы в значительной степени аналогичны резонансу (1.57). Для получения конечной ширины резонанса мы и в дальнейшем будем довольно часто вводить соударения.

Вернемся к формуле (1.57). Выполняя интегрирование по  $z$ , получаем

$$P = (1/8) H_x^2(0) \sin^2 \theta L \omega. \quad (1.58)$$

Коэффициент поглощения электромагнитной волны определяется отношением мощности, поглощаемой в окрестности резонанса, к потоку энергии в падающей электромагнитной волне:

$$K = P/c \frac{H^2}{4\pi}.$$

При  $K \rightarrow 0$  почти весь поток отражается от границы плазмы и образуется стоячая электромагнитная волна. При  $K \rightarrow 1$  энергия падающей электромагнитной волны практически полностью поглощается в окрестности плазменного резонанса.

Используя приведенное выше выражение для  $P$  и формулу (1.56), связывающую амплитуду магнитного поля в окрестности резонанса с амплитудой поля в падающей волне, находим следую-

щую формулу для коэффициента поглощения электромагнитной волны:

$$K=0,25\Phi^2(\tau). \quad (1.59)$$

Из графика функции  $\Phi(\tau)$  видно, что максимальное значение коэффициента поглощения достигается при очень малых углах между направлением распространения волны и градиентом плотности плазмы:

$$\theta_0 \approx 0,5(c/\omega L)^{1/3}$$

(0<sub>0</sub> порядка нескольких градусов). Максимальное значение коэффициента поглощения.

$$K_{\max} \approx 0,4. \quad (1.60)$$

Другой механизм ограничения электрического поля в окрестности резонанса связан с выносом энергии из этой области плазменными волнами. Уравнение, описывающее трансформацию электромагнитной волны в плазменные волны, совпадает с уравнением (1.51), в котором теперь нужно учесть пространственную дисперсию диэлектрической проницаемости. Тогда в соответствии с (1.36)

$$\epsilon(\omega, k) = 1 - (\omega_p^2/\omega^2) (1 + 3k^2 r_D^2).$$

Эта формула получена для плоской волны  $E \sim \exp(ikz)$ . В более общем случае волновое число следует заменить оператором дифференцирования  $k = i\partial/\partial z$ , и тогда диэлектрическую проницаемость следует понимать в операторном смысле

$$\hat{\epsilon} = 1 - (\omega_p^2/\omega^2) (1 - 3r_D^2 \partial^2/\partial z^2).$$

В этом случае вместо соотношения (1.51) имеем следующее дифференциальное уравнение для поля:

$$3r_D^2 \partial^2 E_z / \partial z^2 - (z/L) E_z = H_x(0) \sin \theta. \quad (1.61)$$

Решение этого уравнения также можно выразить с помощью функции Эйри, в данном случае она будет определять структуру плазменных волн, выходящих из области резонанса. Однако для качественных оценок нет необходимости получать точное решение уравнения (1.61). Заменяя в этом уравнении  $\partial^2/\partial z^2$  на  $1/(\Delta z)^2$ , находим характерный пространственный масштаб, на котором изменяется амплитуда плазменных колебаний:

$$\Delta z \sim (Lr_D^2)^{1/3}, \quad (1.62)$$

а максимальная напряженность электрического поля

$$E_{\max} \sim H_x(0) \sin \theta (L/r_D)^{2/3}. \quad (1.63)$$

Теперь сопоставим оба конкурирующих механизма. Трансформация в плазменные волны доминирует над столкновительным поглощением, если характерный пространственный масштаб плазменных колебаний (1.62) превышает ширину области резонанса, обусловленную соударениями  $v < \omega(r_D/L)^{2/3}$ . В противном случае ограничение на величину продольного электрического поля в окрестности  $z=0$  связано с диссипацией на столкновениях.

Поток энергии в плазменной волне определяется формулой  $v_g E_z^2 / 4\pi$ , где  $v_g = d\omega / dk$  — групповая скорость плазменных колебаний, в соответствии с формулой (1.36) равная  $v_g = 3k_z r_D^2 \omega_p$ . По порядку величины  $k_z \sim 1/\Delta z$ , поэтому поток энергии, уносимый плазменной волной, приближенно равен

$$v_g E_z^2 / 4\pi \approx (1/4\pi) (H_x(0) \sin \theta)^2 \omega_p L.$$

Подставив в это соотношение значение магнитного поля в точке резонанса из (1.56), получим окончательное выражение для потока энергии в плазменной волне:

$$v_g E_z^2 / 4\pi = c (H^2 / 4\pi) (\Phi^2(\tau) / 2\pi).$$

Если ввести коэффициент трансформации электромагнитной волны в плазменную волну, равный отношению потоков энергии в плазменной и падающей электромагнитной волнах, то нетрудно видеть, что при углах  $\theta \sim (\omega L / c)^{-1/3}$  он оказывается порядка единицы. Более точное рассмотрение, основанное на решении уравнения Эйри для продольного поля, показывает, что этот коэффициент в точности совпадает с коэффициентом поглощения электромагнитной волны в результате соударений [см. формулу (1.59)]. Иначе говоря, в обоих случаях должна теряться одна и та же доля падающего на плазму потока электромагнитной энергии.

### § 1.8. Излучение плазмы

В плазме без магнитного поля электромагнитное излучение обычно возникает в результате элементарных процессов неупругого взаимодействия частиц. Одним из таких процессов является неупругое рассеяние электронов в электрическом поле иона с потерей энергии, которая превращается в электромагнитное излучение. Это так называемое тормозное излучение электронов — главный источник излучения плазмы при очень высокой электронной температуре. Оно имеет сплошной спектр: энергия фотонов  $\hbar\omega$ , излучаемых в элементарном акте, лежит в пределах от  $\hbar\omega_p$  (что соответствует нижней возможной частоте электромагнитных волн в плазме) до  $\omega_e$ , где  $\omega_e$  — кинетическая энергия электрона до столкновения. Как правило, основная доля излучаемой энергии приходится на частоты  $\omega \gg \omega_p$ . Действительно, это условие для квантов с энергией порядка средней тепловой энергии электронов  $\hbar\omega \sim T_e$  можно преобразовать к виду

$$e^2 (m_e)^{1/2} / \hbar (\Gamma_e)^{1/2} \gg 1 / nr_D^3. \quad (1.64)$$

В правой части неравенства (1.64) стоит величина, характеризующая степень неидеальности плазмы как газа, т. е. обычно чрезвычайно малая. Выражение, стоящее в левой части, удобно представить как отношение  $(I_0 / T_e)^{1/2}$ , где  $I_0 = e^4 m_e / \hbar^2$  с точностью до численного коэффициента порядка единицы совпадает с борovской энергией электрона в атоме водорода. Для условий обычного га-

зового разряда эта величина порядка единицы. Она становится меньше единицы для высокотемпературных плазм, но обычно это с лихвой компенсируется еще более значительным уменьшением правой части неравенства (1.64).

Частотный спектр излучения для элементарных актов торможения нерелятивистских электронов с заданной энергией  $\omega_0$  приближенно можно получить, по существу, в рамках классической электродинамики. Воспользуемся известной формулой для интенсивности классического дипольного излучения заряда, движущегося с ускорением:

$$dW/dt = (2/3) e^2 \dot{v}^2 / c^3. \quad (1.65)$$

Полную энергию, излучаемую электроном при пролете около рассеивающего центра (иона), можно представить и как интеграл по всем возможным частотам:

$$(2/3) (e^2/c^3) \int_{-\infty}^{\infty} \dot{v}^2 dt = (2/3) (e^2/c^3) 4\pi \int_0^{\infty} |\dot{v}_{\omega}|^2 d\omega, \quad (1.66)$$

где  $\dot{v}_{\omega} = (1/2\pi) \int_{-\infty}^{\infty} \dot{v}(t) \exp(-i\omega t) dt$  — разложение ускорения в интеграл Фурье.

Рассмотрим тормозное излучение при столкновениях с большими прицельными расстояниями, т. е. с малыми углами рассеяния ( $\theta \ll 1$ ). В этом случае ускорение, испытываемое электроном, почти перпендикулярно к его первоначальной скорости и приблизительно равно

$$\dot{v}_{\perp} \approx (Ze^2/m_e) [b/(b^2 + v^2 t^2)^{3/2}]. \quad (1.67)$$

Напомним, что в § 1.4 упругие столкновения были рассмотрены в этом же приближении. Теперь вычислим компоненту Фурье от величины ускорения, определяемой формулой (1.67):

$$\begin{aligned} \dot{v}_{\perp \omega} &= (1/2\pi) \int_{-\infty}^{\infty} \dot{v}_{\perp}(t) \exp(-i\omega t) dt = \\ &= (1/2\pi) (2Ze^2 b/m_e) \int_0^{\infty} \cos \omega t [1/(b^2 + v^2 t^2)^{3/2}] dt. \end{aligned}$$

Возникший здесь интеграл можно выразить через некоторую бесселеву функцию от мнимого аргумента. Чтобы не вдаваться в детали теории специальных функций, ограничимся простой интерполяцией интеграла

$$A = \int_0^{\infty} dt \cos \omega t / (b^2 + v^2 t^2)^{3/2},$$

основанной на следующих рассуждениях. При достаточно малых частотах  $\omega \ll v/b$  в существенной области интегрирования  $t \ll b/v$

(т. е. при таких  $t$ , когда знаменатель подынтегрального выражения еще не успевает слишком сильно вырасти) можно положить  $\cos \omega t \approx 1$ . Тогда интеграл берется и равен

$$A(\omega \ll v/b) \approx 1/b^2 v.$$

В противоположном предельном случае больших частот  $\omega \gg v/b$  в той же существенной области интегрирования  $t \ll b/v$  множитель  $\cos \omega t$  успевает совершить большое число осцилляций, в результате чего подынтегральное выражение оказывается знакопеременным и интеграл становится очень малым (экспоненциально, как следует из теории бесселевых функций). В этом можно было бы убедиться и с помощью прямых вычислений, например по методу перевала.

В итоге для приближенной оценки интенсивности тормозного излучения напрашивается простая интерполяционная формула, объединяющая оба предельных случая:

$$A(\omega) \approx \begin{cases} 1/b^2 v & \text{при } \omega < v/b, \\ 0 & \text{при } \omega > v/b. \end{cases}$$

Соответственно энергию, излученную при столкновении с прицельным параметром  $b$  в интервале частот от  $\omega$  до  $\omega + d\omega$ , приближенно можно представить в виде

$$W(\omega) d\omega \approx (8/3) (Z^2 e^2 c / \pi b^2 v^2) r_0^2 d\omega,$$

где  $r_0 = e^2 / mc^2$  — классический радиус электрона. Безразмерная величина  $W(\omega) d\omega / \hbar \omega$  определяет вероятность излучения кванта с частотой в интервале от  $\omega$  до  $\omega + d\omega$ . Теперь нетрудно получить эффективное сечение излучения такого кванта, если проинтегрировать по всем возможным прицельным расстояниям:

$$\begin{aligned} d\sigma(\omega) &= \int_{b_{\min}}^{b_{\max}} (W(\omega) / \hbar \omega) d\omega 2\pi b db \approx \\ &\approx (16/3) (Z^2 e^2 c^2 / \hbar c v^2) r_0^2 (d\omega / \omega) \ln(b_{\min} / b_{\max}). \end{aligned}$$

В этом выражении в отличие от формулы кулоновского логарифма  $b_{\max}$ , вообще говоря, уже не имеет смысла дебаевского радиуса  $r_D$ . Действительно, поскольку  $W(\omega)$  равно нулю при  $\omega > v/b$ , то всегда  $b_{\max}$  во всяком случае меньше  $v/\omega$ .

Таким образом, при  $v/\omega < r_D$  следует обрезать логарифм при  $b_{\max} = v/\omega$ . Именно так обстоит дело во всех практически интересных случаях  $\omega \gg \omega_p$ . Если в этом, по существу чисто классическом, выводе учесть возможные квантовые эффекты хотя бы самым примитивным образом, положив  $b_{\min}$  равным длине волны де-Бройля электрона  $b_{\min} = \hbar / mv$ , то окончательное выражение для сечения тормозного излучения

$$d\sigma(\omega) \approx d\omega (16/3) (Z^2 e^2 / c \hbar) (c^2 / v^2) (r_0^2 / \omega) \ln(m_e v^2 / \omega \hbar) \quad (1.68)$$



оказывается почти совпадающим с результатом квантовомеханических вычислений в борновском приближении. Если же интересоваться более тонкими деталями, то следовало бы обратиться к довольно громоздкому выражению, полученному в свое время Зоммерфельдом путем строгих вычислений. Во всяком случае формула (1.68) правильно описывает зависимости от  $Z$ ,  $e^2$  и скорости электронов. Из нее следует, что электрон при движении в веществе за 1 с теряет на излучение энергию

$$d\omega_e/dt = \int_0^{\hbar\omega = m_e v^2/2} \hbar\omega n_i v d\tau(\omega) = B n_i Z^2 (\omega_e)^{1/2}, \quad (1.69)$$

где численный множитель  $B$ , получающийся с учетом теории Зоммерфельда, равен  $1,5 \cdot 10^{-25}$ , если кинетическую энергию электрона  $\omega_e$  выражать в электронвольтах. Интенсивность тормозного излучения плазмы находят, интегрируя выражение (1.69) по энергетическому распределению электронов. При максвелловском законе распределения полная энергия, которую излучает 1 см<sup>3</sup> плазмы в 1 с, должна составлять

$$q_{изл} = 1,5 \cdot 10^{-27} n_e n_i Z^2 (T_e^\circ)^{1/2}. \quad (1.70)$$

В плазме, содержащей ионы нескольких веществ,  $q_{изл}$  будет представляться суммой выражений вида (1.70) со значениями  $n_i$  и  $Z$ , соответствующими разным компонентам. Из формулы (1.70) следует, в частности, что присутствие даже очень незначительной примеси тяжелых ионов в плазме, которая в основном содержит ионы легкого вещества, должно приводить к резкому возрастанию интенсивности тормозного излучения.

Выражение (1.70) для интенсивности тормозного излучения справедливо с достаточной точностью при не слишком высоких значениях  $T_e$ , когда электроны можно считать нерелятивистскими. Однако оно нуждается в корректировке при переходе к релятивистским электронным температурам (т. е. для значений  $T_e^\circ \sim 10^9$  и выше). В этой области температур интенсивность излучения, обусловленного взаимодействием электронов с кулоновским полем ядер, растет с  $T_e$  быстрее, чем это следует из формулы (1.70). Кроме того, при релятивистских скоростях столкновения электронов с электронами также приводят к увеличению тормозного излучения. Выше такие столкновения не учитывались при вычислении тормозного излучения из-за тождественного обращения в нуль второй производной по времени от дипольного момента системы, состоящей из электронов.

Излучение с непрерывным спектром возникает в плазме также в результате процессов рекомбинации электронов с ионами. В элементарном акте рекомбинации свободный электрон в результате взаимодействия с электрическим полем иона захватывается на

один из дискретных энергетических уровней. При этом излучается фотон с энергией, равной  $\omega_e + \omega_s$ , где  $\omega_s$  — энергия связи электрона на занятом им квантовом уровне. Заряд иона в акте рекомбинации уменьшается на единицу (в частности, рекомбинация однократно заряженного иона приводит к образованию нейтрального атома). Захват электрона может происходить не только на наинизший возможный энергетический уровень, но также и на уровни, соответствующие различным возбужденным состояниям атомной системы с зарядом  $(Z_i - 1)e$ . Поэтому после актов рекомбинации может происходить высвечивание возбужденных ионов (или атомов) с испусканием фотонов, принадлежащих к линейному спектру излучения вещества плазмы.

Интенсивность рекомбинационного излучения уменьшается с увеличением кинетической энергии электрона и очень сильно зависит от заряда ионов.

Для грубой оценки энергии, излучаемой в сплошном спектре в результате процессов рекомбинации в  $1 \text{ см}^3$  плазмы за 1 с, можно пользоваться формулой

$$q_{\text{рек}} \approx 5 \cdot 10^{-22} n_e n_i Z_i^4 (T_e)^{-1/2}. \quad (1.71)$$

В общем случае в правой части выражения (1.71) надо заменить  $n_i Z_i^4$  на  $\sum n_i Z_i^4$ , распространяя суммирование на все разновидности ионов, присутствующих в плазме. Заметим, что при достаточно большом времени жизни ионов в плазме благодаря конкурирующим процессам ионизации — рекомбинации среднее значение заряда иона данного вещества должно приближаться к некоторому стационарному значению, которое тем ближе к  $Z_e$ , чем выше электронная температура. Как следует из сравнения формул (1.70) и (1.71), в плазме с относительно невысокой электронной температурой рекомбинационное излучение должно преобладать над тормозным, в то время как при большом значении  $T_e$  имеет место обратное явление.

В низкотемпературной плазме с небольшой степенью ионизации главным источником квантового электромагнитного излучения становятся возбужденные атомы и молекулы. Поэтому излучение холодной плазмы имеет преимущественно линейчатый характер. При малых значениях  $T_e$  интенсивность линейчатого спектра излучения может на несколько порядков превосходить интенсивность сплошного спектра рекомбинационного и тормозного излучений. Поскольку состав линейчатого спектра и интенсивность входящих в него спектральных линий чрезвычайно сильно зависят от индивидуальных свойств атомов и ионов плазмы, то трудно установить общие количественные закономерности, характеризующие зависимость выхода линейчатого излучения от электронной температуры (в особенности для плазмы, содержащей атомы различных элементов). Однако можно отметить одну общую закономерность качественного характера — при достаточно высокой электронной тем-

пературе в плазме, находящейся в стационарных условиях, у атомов оторваны внешние электронные оболочки, и это приводит к обеднению спектра и быстрому падению интенсивности линейчатого излучения.

Здесь действуют две причины: во-первых, уменьшается число легко возбуждаемых электронов, находящихся в связанном состоянии, и, во-вторых, при больших значениях энергии электронов падает вероятность элементарных актов возбуждения.



Рис. 1.10. Зависимость интенсивности линейчатого излучения от температуры для углеродной плазмы (штриховая кривая) и полное излучение (сплошная кривая)

Вследствие этого в области высоких значений  $T_e$  интенсивность линейчатого излучения представляет собой быстро убывающую функцию электронной температуры. Иллюстрацией может служить приведенная на рис. 1.10 кривая изменения интенсивности линейчатого спектра ионов углерода в плазме, рассчитанная теоретически.

Если плотность плазмы и геометрические размеры той области пространства, которую она занимает, невелики, то все излучение, образующееся в плазме, выходит наружу. Предположим, что при постоянных

плотности и температуре плазмы занимаемый ею объем возрастает. При этом выход излучения будет увеличиваться пропорционально объему. Но полный поток излучения из плазмы не может превосходить поток излучения черного тела, имеющего ту же поверхность  $s$  и ту же температуру  $T_e$ . Следовательно, при достаточно больших размерах области, занимаемой плазмой, должны вступить в действие процессы поглощения, замедляющие рост потока излучения и приводящие к установлению термодинамического равновесия между электронами и излучением. Существует несколько различных элементарных механизмов поглощения излучения, каждый из которых может рассматриваться как обратный по отношению к одному из механизмов испускания фотонов.

Излучательному переходу между двумя дискретными уровнями в атоме или ионе соответствует селективное поглощение спектральных линий, приводящее к обратному электронному переходу. Процессу рекомбинации отвечает процесс фотоионизации атома или иона. Тормозному излучению соответствует обратный механизм, заключающийся в поглощении фотона свободным электроном в электрическом поле атомной системы. Вероятность различных процессов поглощения связана с вероятностями соответствующих излучательных переходов на основе принципа детального равновесия.

Для того чтобы найти, на каких длинах устанавливается тепловое равновесие между тормозным излучением и обратным ему про-

цессом поглощения, воспользуемся следующими рассуждениями. В уравнении, учитывающее изменение энергии излучения, надо добавить слагаемое, учитывающее поглощение  $-W(\omega)/\tau_{\phi}$ . Здесь по смыслу  $\tau_{\phi}$  — время свободного пробега фотона с частотой  $\omega$ . Оно, очевидно, связано с длиной свободного пробега фотона  $l_{\phi}=c\tau_{\phi}$ . Из уравнения (1.69) имеем для одного электрона

$$dW(\omega)/dt = v\hbar\omega n_e d\sigma(\omega).$$

Учитывая теперь наряду с излучением (1.68), (1.69) и поглощение, получаем

$$dW(\omega)/dt = \langle n_i n_e (16/3) (Z^2 e^2 / c) \times \\ \times (c^2 / v^2) r_0^2 v \ln(m_e v^2 / \omega \hbar) \rangle - W(\omega) / \tau_{\phi}.$$

(Угловые скобки означают усреднение по максвелловскому распределению электронов.)

В экспериментальной физике лабораторной плазмы обычно имеют дело с такими условиями эксперимента, при которых пробеги фотонов во много раз превышают линейные размеры плазменных образований (в некоторых специальных случаях, когда исследуется очень плотная плазма, узкая спектральная область вблизи линии поглощения может представлять исключение). В таких оптически прозрачных плазмах фотоны не удерживаются и плотность энергии излучения значительно меньше равновесной, т. е. плотности черного излучения. По мере увеличения размеров плазменного образования сначала должно устанавливаться равновесие для малых частот, как это следует из формулы (1.68).

Черное излучение может установиться лишь внутри пространственно протяженных или достаточно плотных плазм, например в звездах. В таких плазмах при очень высоких температурах черное излучение может давать основной вклад в плотность энергии (а значит и в давление). Так, при плотности частиц в звездах порядка  $10^{24}$  см<sup>-3</sup> плотность энергии излучения  $aT^4$  превышает  $nT$ , если температура становится больше десятка килоэлектронвольт. Это условие не выполняется для Солнца, температура в центре которого порядка 1,5 кэВ. Но и в солнечной плазме черное излучение играет важную роль. В частности, механизм переноса тепла во внутренних слоях Солнца в значительной степени определяется черным излучением. Такой перенос тепла квантами из спектра черного излучения называют лучистой теплопроводностью. Коэффициент лучистой теплопроводности нетрудно оценить, если известны средний пробег фотонов вблизи максимума распределения Планка  $\hbar\omega \sim 5 kT$ . Коэффициент диффузии таких фотонов  $D \sim (1/3) l_{\phi} c$ . Поток фотонов равен  $-D \text{grad } n_{\phi}$ . Поток энергии, переносимый фотонами,

$$q_{\phi} \approx -D \text{grad } (\overline{\hbar\omega n_{\phi}}),$$

где  $\overline{\hbar\omega n_\phi}$  — плотность энергии черного излучения  $aT^4$ . Таким образом,  $q_\phi \approx -4DaT^3 \text{ grad } T$ . Это означает, что коэффициент лучистой теплопроводности  $\kappa \sim (4/3)l_\phi caT^3$ .

Пробег фотонов в такой плазме, как солнечная, определяется в основном механизмом поглощения, обратным тормозному излучению. Его можно связать со средним временем свободного пролета  $\tau_\phi$  фотонов  $l_\phi = c\tau_\phi$ .

Интересующую нас величину  $\tau_\phi$  найдем из условия, что в равновесии между электронами и излучением  $W(\omega)$  должно представлять собой распределение Планка. Следовательно,

$$\tau_\phi \approx W_\Pi / (n_e n_i (16/3) (Z^2 e^2 / c) (c^2 / v^2) r_e^2 v \ln(mv^2 / \hbar\omega)). \quad (1.72)$$

Для мягких фотонов ( $\hbar\omega < T_e$ ), которые могут излучаться электронами, принадлежащими максвелловскому распределению, формулу (1.72) можно привести к совсем простому виду. Распределение Планка превращается в спектр Рэлея — Джинса  $W(\omega) = T^3 \omega^2 / \pi^2 c^3$ ; а угловые скобки, символизирующие усреднение по максвелловскому распределению электронов, можно убрать, приписав  $v_e$  смысл средней тепловой скорости  $(3/2)kT = mv_e^2/2$ . Таким образом, находим, что

$$l_\phi = c\tau_\phi \sim c(\omega^2 / \omega_p^2) \tau_{ei}^*. \quad (1.72a)$$

Величина  $\tau_{ei}^*$  отличается от среднего времени столкновения электрона с ионом лишь тем, что вместо кулоновского логарифма  $L_K$  здесь стоит, вообще говоря, несколько меньшая величина.

Этот результат можно получить достаточно простым способом, используя мнимую часть диэлектрической проницаемости:

$$\epsilon = 1 - \omega_p^2 / \omega(\omega + iv_e).$$

До сих пор мы исследовали электромагнитное излучение в плазме. Но мы уже знаем, что в плазме кроме электромагнитных колебаний возможны также колебания плотности заряда — плазменные волны, и естественно ожидать, что часть потерь энергии заряженной частицы в плазме будет связана с возбуждением продольных колебаний — поляризационными потерями. Важная особенность поляризационных потерь состоит в том, что основная доля энергии, теряемой в этом случае заряженной частицей, остается в плазме в виде колебаний плотности заряда и в конечном счете усваивается плазмой в результате поглощения при соударениях либо затухании Ландау плазменных колебаний. Однако не следует забывать, что в неоднородной плазме существует и другой механизм — трансформация в электромагнитные колебания (см. § 1.7).

Поляризационные потери можно также интерпретировать как потери энергии при кулоновских столкновениях с большими прицельными параметрами, когда из-за дальнедействующего характера кулоновских сил во взаимодействие с налетающей частицей

может одновременно вовлекаться большое число частиц плазмы. С макроскопической точки зрения это обстоятельство проявляется в поляризации плазмы как сплошной среды при пролете заряженной частицы, т. е. в возбуждении уже знакомых нам плазменных колебаний.

Для иллюстрации механизма поляризационных потерь ограничимся для простоты случаем нерелятивистских скоростей частицы. Перейдем к фурье-представлению электрического потенциала колебаний, вызываемых такой заряженной частицей:

$$\varphi(t, \mathbf{r}) = (1/2\pi)^4 \int dk d\omega \exp\{i\mathbf{k}\mathbf{r} - i\omega t\} \varphi_{\mathbf{k}\omega}. \quad (1.73)$$

Плотность заряда, создаваемая точечным зарядом, движущимся со скоростью  $\mathbf{v}$ , определяется как  $\rho_e = -e\delta(\mathbf{r} - \mathbf{v}t)$ . Разложим  $\delta$ -функцию по плоским волнам:

$$\delta(\mathbf{r} - \mathbf{v}t) = (1/2\pi)^3 \iint \delta(\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}) \exp\{i\mathbf{k}\mathbf{r} - i\omega t\} dk d\omega.$$

Тогда фурье-компонента плотности заряда  $-e\delta(\mathbf{r} - \mathbf{v}t)$  есть

$$\rho_{\mathbf{k}\omega}^e = -2\pi e \delta(\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}). \quad (1.74)$$

Воспользуемся уравнением Пуассона, записанным для каждой фурье-компоненты:

$$\varepsilon(\omega, \mathbf{k}) k^2 \varphi_{\mathbf{k}\omega} = 4\pi \rho_{\mathbf{k}\omega}^e, \quad (1.75)$$

причем  $\varepsilon(\omega) = 1 - \omega_p^2/\omega^2$  — обычная диэлектрическая проницаемость холодной плазмы для волны с фиксированной частотой [см. (1.35)]. Тогда для отдельной фурье-гармоники потенциала имеем следующее уравнение:

$$\varphi_{\mathbf{k}\omega} = - (8\pi^2 e / \varepsilon(\omega) k^2) \delta(\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}). \quad (1.76)$$

Отсюда сразу следует, что заряженная частица возбуждает только те гармоники потенциала, которые находятся в фазовом резонансе с этой частицей, т. е. скорость движения частицы в направлении распространения волны должна совпадать с фазовой скоростью волны  $k v \cos \theta = \omega$ . Мощность излучения определяется формулой

$$dW/dt = -\overline{\mathbf{j}\mathbf{E}}, \quad (1.77)$$

где  $\mathbf{j} = -e\mathbf{v}\delta(\mathbf{r} - \mathbf{v}t)$  — плотность тока, создаваемая движущимся электроном;  $\mathbf{E} = -\nabla\varphi$  — электрическое поле плазменных колебаний; черта в правой части (1.77) соответствует усреднению по расстояниям, большим по сравнению с длиной волны. С помощью (1.76) получим

$$dW/dt = 8\pi^2 e^2 v / (2\pi)^4 \int dk d\omega (\mathbf{k}/k^2 \varepsilon(\omega)) \delta(\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}). \quad (1.78)$$

Подынтегральное выражение имеет особенность при частотах  $\omega = \pm \omega_p$ . Эта особенность аналогична рассматривавшейся в § 1.7 и имеет резонансный характер. Однако если при распространении электромагнитной волны в неоднородной плазме резонанс имеет пространственный характер [возникает в слое  $\omega_p(z) = \omega$ ], то в эффекте поляризационных потерь резонанс возникает в спектре по частотам (при интегрировании по частоте). Для устранения особенности подынтегрального выражения по аналогии с § 1.7 введем малое затухание. Тогда с учетом мнимой части  $\varepsilon(\omega)$  получим

$$1/\varepsilon(\omega) = \omega_p^2 / (\omega^2 - \omega_p^2 + i\nu\omega).$$

Кроме действительной части это выражение имеет мнимую часть, которую в пределе  $\nu \rightarrow 0$  можно представить как

$$\lim_{\nu \rightarrow 0} \text{Im} [1/(\omega^2 - \omega_p^2 + i\nu\omega)] = -\pi \delta(\omega^2 - \omega_p^2).$$

Согласно формуле (1.78) в интеграле, определяющем мощность потерь, существен только вклад от  $\delta$ -функции. Выполнив интегрирование, придем к следующей формуле для мощности потерь:

$$dW/dt = 16\pi^2 e^2 \omega_p^2 / (2\pi)^4 \int dk \delta(\omega - kv) / k^2. \quad (1.79)$$

Для получения окончательной формулы следует проинтегрировать в (1.79) по  $k_{\parallel}$  и по  $k_{\perp}$ . Последний интеграл логарифмически расходится при больших  $k_{\perp}$ , и его необходимо обрезать при  $k_{\text{max}} \sim 1/b$ . Здесь  $b$  — минимальный прицельный параметр «коллективных» столкновений, т. е. расстояние, на котором становится неприменимым описание плазмы как сплошной среды. Очевидно, что  $b$  порядка радиуса дебаевского экранирования заряда  $r_D = (T/4\pi e^2 n_0)^{1/2}$ . Окончательный результат для скорости потерь имеет вид

$$dW/dt = (e^2 \omega_p^2 / \nu) \ln(\nu / \omega_p b). \quad (1.80)$$

Величина, стоящая над знаком логарифма в этой формуле, — отношение скорости частицы к тепловой скорости, т. е. порядка 10—100. Поэтому  $\ln(\nu / \omega_p b)$  по порядку величины не сильно отличается от единицы. В этой связи напомним, что потери энергии на парные соударения с учетом многократного рассеяния по сравнению с формулой (1.80) содержат большой множитель — так называемый кулоновский логарифм, т. е. величину порядка 20. Подобно тому как рассеяние на тепловых флуктуациях в кулоновский логарифм раз меньше рассеяния при парных столкновениях, потери энергии на излучение плазменных волн (поляризационные потери) в кулоновский логарифм раз меньше потерь энергии при парных столкновениях. Следует иметь в виду, что поляризационные потери существенно увеличиваются при переходе от отдельных зарядов к пучкам заряженных частиц. В этом случае в актах излучения участвуют не отдельные электроны, а «бунчи» (сгустки) когерент-

но излучающих частиц, на которые разбивается пучок из-за неустойчивости. При этом в формуле (1.80) для мощности потерь следует заменить  $e$  на  $N_{эф}e$ , где  $N_{эф}$  — число частиц в бунче, и соответственно этому потери, рассчитанные на одну частицу, возрастают пропорционально  $N_{эф}$  ( $N_{эф} \gg 1$ ). Самой сложной задачей является определение эффективного заряда бунча. Эту задачу можно решить только в рамках самосогласованной теории неустойчивости, основывающейся на кинетическом подходе.

### § 1.9. Кинетическое уравнение для плазмы

Идеальную плазму можно, как и обычный газ незаряженных частиц, описывать с помощью кинетического уравнения для функции распределения частиц в фазовом пространстве. В этом случае, разумеется, нужно вводить свою функцию распределения для каждого сорта зарядов. В координатной записи функция распределения  $f(x, y, z, v_x, v_y, v_z, t)$  определяет плотность частиц на единицу объема в фазовом пространстве вблизи точки с геометрическими координатами  $x, y, z$  и компонентами скоростей  $v_x, v_y, v_z$  для момента времени  $t$ . Используем более компактную форму записи, в которой функция распределения имеет вид  $f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$  и относится к точке с векторными координатами  $\mathbf{r}, \mathbf{v}$ . Интеграл от функции распределения по всему объему в пространстве скоростей дает плотность в данном элементе геометрического объема

$$n(\mathbf{r}, t) = \int f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) d\mathbf{v}.$$

Как показано выше, на заряженные частицы плазмы могут воздействовать силовые поля двух типов: а) регулярные поля, создаваемые внешними источниками или избыточными зарядами в объемах с размерами, превышающими дебаевскую длину (как, например, для колебаний плазмы), и б) случайные микрополя отдельных частиц, вызывающие процессы рассеяния (столкновения). Кинетическое уравнение описывает изменение функции распределения  $f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$  во времени под действием указанных полей. Допустим сначала, что микрополя относительно слабо влияют на процессы в плазме (это справедливо для плазмы с низкой концентрацией и очень высокой электронной и ионной температурами). В этом случае изменение  $f$  в некотором заданном элементе фазового объема происходит вследствие того, что каждая фазовая точка, изображающая отдельную частицу, непрерывно перемещается в геометрическом пространстве и пространстве скоростей. Причиной движения в пространстве скоростей может быть наличие в плазме макроскопического электрического поля  $\mathbf{E}$  (в общем случае  $\mathbf{E}$  — функция геометрических координат). Вычислив потоки частиц, входящих в элементарный объем фазового пространства и выходящих из него, нетрудно получить уравнение баланса частиц

$$\partial f / \partial t = - (d\mathbf{r} / dt) (df / d\mathbf{r}) - (d\mathbf{v} / dt) (df / d\mathbf{v}). \quad (1.81)$$



Поскольку  $dv/dt=qE/m$ , где  $q$  и  $m$  — соответственно заряд и масса частицы, то (1.81) равносильно уравнению

$$df/dt = -vdf/dr - (qE/m)(df/dv). \quad (1.82)$$

Это и есть кинетическое уравнение для заряженных частиц плазмы (для электронов или ионов). В формуле (1.82)  $df/dr$  обозначает вектор с компонентами  $df/dx$ ,  $df/dy$ ,  $df/dz$  и соответственно  $df/dv$  есть вектор с компонентами  $df/dv_x$ ,  $df/dv_y$ ,  $df/dv_z$ . Перенесем все члены уравнения (1.82) в левую часть и перепишем его в следующем виде:

$$df/dt = df/dt + vdf/dr + (qE/m)df/dv = 0. \quad (1.83)$$

В такой форме кинетическое уравнение имеет наиболее наглядный смысл, так как (1.83) означает сохранение плотности частиц в элементе фазового объема, движущемся вместе с выделенной группой частиц. Формула (1.83) — прямое следствие постоянства числа частиц и величины движущегося фазового объема (фазовый объем сохраняется по теореме Лиувилля, поскольку движение происходит в макроскопическом потенциальном поле).

Электрическое поле в плазме создается не только внешними источниками, но также объемными зарядами электронов и ионов. Вклад объемных зарядов плазмы в напряженность электрического поля учитывается в дополнителном уравнении для  $E$ :

$$\text{div } E = 4\pi\rho = 4\pi e (\int f_i dv - \int f_e dv). \quad (1.84)$$

Поле  $E$  в этом уравнении называется самосогласованным (поскольку существует обратная связь между  $E$  и  $f$ ). Пренебрежение микрополями отдельных частиц, т. е. кулоновскими столкновениями, справедливо, если ограничиться изучением процессов, разыгрывающихся за времена, меньшие среднего времени свободного пробега. Многие быстротекающие явления в разреженной плазме, где столкновения редки, можно рассматривать в рамках такого приближения: колебания, развитие некоторых видов неустойчивостей и т. п. Система уравнений (1.83) и (1.84), описывающая поведение бесстолкновительной плазмы, широко известна под названием «уравнения Власова».

В случае когда значительную роль в поведении плазмы играют не только макроскопические поля  $\lambda > r_D$ , но и микрополя отдельных частиц, ответственные за процессы кулоновского рассеяния, равенство (1.83) перестает быть справедливым. В отдельном акте кулоновского столкновения вектор скорости электрона (или иона) испытывает конечное изменение, и частица перебрасывается из одной области пространства скоростей в другую. Поэтому в малом элементе фазового объема, который движется вместе с принадлежащими к нему частицами вдоль фазовой траектории, определяемой действием макроскопического поля, полное число частиц в общем случае не должно оставаться постоянным. Учитывая роль кулоновских столкновений, заменим (1.83) следующим соотношением:

$$df/dt = St \{f\}. \quad (1.85)$$

Выражение, стоящее в правой части, называется интегралом столкновений. Для того чтобы найти этот интеграл, нужно вычислить результирующий эффект миграции частиц в пространстве скоростей, происходящий вследствие процессов кулоновского рассеяния. Не будем приводить здесь явное выражение для строгого интеграла столкновений не только потому, что такие вычисления выходят за рамки данной книги, но и потому, что многие свойства плазмы можно выяснять с помощью более простых приближений. К наибольшим упрощениям ведет интерполяция интеграла столкновений формулой

$$\text{St}\{f\} = (f_0 - f) / \tau. \quad (1.86)$$

Это так называемое  $\tau$ -приближение в кинетической теории. В приведенной формуле  $\tau$  обозначает среднее время свободного пробега частиц.

В правой части (1.86)  $f_0$  — равновесная максвелловская функция распределения. Физический смысл правой части уравнения (1.86) заключается в том, что в результате столкновений восстанавливается максвелловское распределение по скоростям,  $f$  экспоненциально приближается к  $f_0$  с характерным временем установления  $\tau$ . Как видно из рассмотрения столкновений между частицами плазмы, понятие  $\tau$  как среднего времени между столкновениями неоднозначно. Различные процессы в плазме характеризуются разными  $\tau$ , причем это различие может быть чрезвычайно большим. Так, время обмена энергиями между электронами и ионами приблизительно в  $m_i/m_e$  раз больше времени потери импульса электронами при соударении с ионами. Даже для одинаковых частиц время столкновения зависит еще и от скорости. Это означает, что пользоваться кинетическим уравнением в  $\tau$ -приближении следует весьма осторожно. Выбирать  $\tau$  в интерполяционной формуле, заменяющей интеграл столкновений, нужно в зависимости от конкретной постановки задачи. Так, например, в задаче о законе Ома следует выбрать  $\tau$  равным среднему времени потери импульса электронами при столкновениях с ионами.

Покажем, как с помощью кинетического уравнения для электронов в  $\tau$ -приближении можно получить формулу для электропроводности. В этом случае кинетическое уравнение имеет вид

$$(eE/m_e) \partial f / \partial v = (f_0 - f) / \tau_{ei}. \quad (1.87)$$

Пусть  $f = f_0 + f_1$ . При достаточно малом электрическом поле второй член представляет собой лишь относительно небольшую добавку к  $f_0$ , и поэтому можно пренебречь произведением двух малых сомножителей  $(eE/m_e) \partial f_1 / \partial v$ . Тогда

$$(eE/m_e) \partial f_0 / \partial v = -f_1 / \tau_{ei}. \quad (1.88)$$

Отсюда  $j = -e \int v f_1(v) dv = (e^2 E / m_e) \tau_{ei} \int f_0 dv = (ne^2 / m_e) \tau_{ei} E$ ,

т. е. приходим к выведенной в § 1.5 формуле электропроводности.

Теперь раскроем смысл приближения слабого электрического поля. Условие  $f_1 \ll f_0$  можно объяснить с помощью формулы (1.88), пользуясь также тем, что по порядку величины  $\partial f_0 / \partial v \sim f_0 / v\tau$ . В итоге получаем  $(eE/m_e)(\tau_{ei}/v_T) \ll 1$  или  $(eE/T_e)\lambda_{ei} \ll 1$ . Это значит, что энергия, приобретаемая электроном в электрическом поле на длине свободного пробега, должна быть намного меньше тепловой.

При нахождении коэффициента электронной теплопроводности нужно учитывать столкновения электронов друг с другом и с ионами. Напротив, в задаче об ионной теплопроводности полностью ионизованной плазмы  $\tau$  — среднее время столкновения иона с ионами; столкновения же ионов с электронами здесь можно не учитывать, так как ионы практически не рассеиваются на электронах. В тех случаях, когда существенны столкновения заряженных частиц с нейтральными атомами и молекулами, вводятся другие характерные времена  $\tau$ . Следует еще раз подчеркнуть, что кажущийся произвол, связанный с выбором  $\tau$ , в действительности можно устранить при корректном подходе к отдельным конкретным задачам о поведении плазмы в различных физических процессах.

Для определения коэффициента теплопроводности воспользуемся методом кинетического уравнения. Если плазма находится в стационарном состоянии, а внешнее электрическое поле отсутствует, то

$$v \partial f / \partial x = (f_0 - f) / \tau. \quad (1.89)$$

Здесь  $x$  — направление градиента температуры. Для достаточно плотной плазмы, в которой длина свободного пробега  $l \sim v\tau$  мала по сравнению с характерными линейными размерами, функцию можно разложить в ряд по степеням малого параметра  $\tau$ :  $f = f_0 + f_1 + \dots$ , где  $f_0$  — максвелловская функция распределения\*:

$$f_0 = n (m/2\pi T)^{3/2} \exp(-mv^2/2T(x)).$$

В следующем приближении имеем

$$f_1 = -\tau \partial f_0 / \partial x = [-n\tau v (m/2\pi)^{3/2}] \times \\ \times (mv^2/2T^{5/2} - 1/2T^{3/2}) \exp(-mv^2/2T) \partial T / \partial x.$$

Каждая компонента плазмы переносит поток тепла

$$q = \int (v/2) mv^2 f(v) dv = \int (v/2) mv^2 f_0 dv - \int (v/2) mv^2 f_1 dv.$$

Первый из этих интегралов равен нулю. Вычисляя второй интеграл, находим, что

$$q = 3n\pi\tau (T/m) \partial T / \partial x. \quad (1.90)$$

Суммарный поток тепла для плазмы получится, если сложить потоки тепла, которые переносятся электронами и ионами. Однако

\* Этот упрощенный расчет выполняется для одномерной модели плазмы.

из (1.90) следует, что ионный поток тепла исчезающе мал по сравнению с электронным (так как  $m_e/m_i \ll 1$ ). Поэтому коэффициент теплопроводности плазмы

$$\kappa = 3\pi n\tau(T_e/m_e). \quad (1.91)$$

где  $\tau$  — время между двумя столкновениями для электронов. Здесь нужно учитывать любые столкновения электронов (как друг с другом, так и с ионами). Но поскольку  $\tau_{ee} \sim \tau_{ei}$ , то порядок величины не изменится, если положить

$$\kappa \approx (3/2)\pi n\tau_{ei}(T_e/m_e). \quad (1.92)$$

Правильный численный множитель в этом выражении для коэффициента теплопроводности дает строгая кинетическая теория с точным, а не приближенным интегралом столкновений. Не проводя здесь слишком громоздких вычислений, приведем результат такой строгой теории:

$$\kappa = 3,203(nT_e\tau_{ei}/m). \quad (1.93)$$

где  $\tau_{ei} = (3,5 \cdot 10^8/L_n)(T_e^{3/2}/n)$ .

Таким образом, в плазме носителями тепла и электрического тока являются электроны (по крайней мере в отсутствие магнитного поля).

В этом смысле плазма близка по своим свойствам к металлам. Естественно, что и для плазмы справедлив аналог закона Видемана—Франца, утверждающий, что отношение коэффициента теплопроводности к коэффициенту электропроводности пропорционально температуре. Это следует из (1.22) и (1.93).

Однако упрощенная форма интеграла столкновений в  $\tau$ -приближении хотя и описывает установление максвелловского распределения, но не отражает основную особенность кулоновского рассеяния, которая приводит к медленному («диффузионному») изменению вектора скорости частиц, имеющему место в результате многократного рассеяния на малые углы. Л. Д. Ландау привел интеграл столкновений между заряженными частицами к специальной диффузионной форме (напоминающей диффузию по Фоккеру—Планку), учитывая рассеяние частиц только на очень малые углы. Но даже этот вывод довольно громоздок. Воспользуемся некоторыми дополнительными упрощениями, чтобы проиллюстрировать идею диффузионного подхода к интегралу столкновений. При этом ограничимся рассмотрением функции распределения, зависящей лишь от одной компоненты скорости  $f(v)$  (это значит, что по двум другим составляющим скорости проведено интегрирование), и будем считать, что рассеивающие заряженные частицы находятся в состоянии теплового равновесия с некоторой температурой  $T$ .

В диффузионном приближении влияние многократных столкновений приводит, во-первых, к появлению силы динамического трения  $F_{тр} = -m\mathbf{v}$  и, во-вторых, к диффузионному блуждающему ско-

рости рассеиваемой частицы под действием толчков, создаваемых тепловым движением рассеивающих зарядов. Соответственно в интеграле столкновений появятся два члена. Один из них, который описывает регулярное изменение скорости из-за силы трения  $dv/dt = -\nu v$ , дает в левой части кинетического уравнения слагаемое  $\partial(\partial v/\partial t)f/\partial v$ , т. е.  $-\partial(\nu v)/\partial v$ . Оно совершенно аналогично члену  $\text{div}_r((dr/dt)n)$ , т. е.  $\text{div}(vn)$ , в обычном уравнении непрерывности. Поэтому нет нужды в более строгом доказательстве. Другой член описывает диффузию  $\partial(D(v)\partial f/\partial v)/\partial v$  с некоторым коэффициентом  $D(v)$ , который можно выразить через ту же частоту столкновений  $\nu$ , вводя эффективный шаг блужданий скорости  $D(v) = \overline{\Delta v^2} \nu$ . Строгое рассмотрение многократного рассеяния должно дать величину  $\overline{\Delta v^2}$ . Однако при сделанном выше упрощающем предположении о том, что рассеивающие частицы имеют определенную температуру  $T$ , ответ получить еще легче. Под действием столкновений с рассеивающими зарядами, по сути дела играющими роль термостата, функция распределения  $f(v)$  рассеиваемых частиц должна стремиться к максвелловской с температурой термостата  $T$ , так что интеграл столкновений

$$\text{St}\{f\} = (\partial/\partial v) [-\nu v f + D(v) \partial f/\partial v] \quad (1.94)$$

должен обращаться в нуль в тех случаях, когда функция распределения  $f$  совпадает с максвелловской:

$$f_0 = \text{const} \cdot \exp(-mv^2/2T).$$

Отсюда находим, что

$$D(v) = -(T/m)\nu \quad (1.95)$$

и диффузионный интеграл столкновений

$$\text{St}\{f\} = -(\partial/\partial v) [\nu(vf + (T/m)\partial f/\partial v)].$$

Полученный результат весьма просто обобщается на трехмерный случай, когда тензор коэффициентов диффузии

$$D_{\alpha\beta} = \langle \Delta v_\alpha \Delta v_\beta \rangle / \Delta t,$$

вид которого также можно определить из условия обращения в нуль интеграла столкновений для равновесной максвелловской функции распределения с температурой, равной температуре термостата:

$$D_{\alpha\beta} = -(T/m_e) \nu (v_\alpha v_\beta / v^2). \quad (1.96)$$

Учитывая также возможность столкновения электронов с несколькими рассеивающими центрами, интеграл столкновений запишем в виде

$$\text{St}\{f\} = - \sum_{i, \alpha, \beta} \frac{\partial}{\partial v_\alpha} \{v_i [v_\alpha f + (T_i/m_e) (v_\alpha v_\beta / v^2) (\partial f / \partial v_\beta)]\}. \quad (1.97)$$

В некоторых случаях, когда под действием каких-либо внешних факторов (например, плазменной волны) в некоторой области пространства скоростей у функции распределения рассеиваемых частиц появляются большие градиенты, в интеграле столкновений для этой области скоростей достаточно удержать только вторую производную. В этом случае эффективной оказывается следующая форма интеграла столкновений:

$$\text{St}\{f\} = -v^2 \nu (\partial^2 (f - f_0) / \partial v^2), \quad (1.98)$$

которая также описывает установление максвелловского распределения  $f_0$ .

Детальный анализ свойств плазмы, связанных с влиянием столкновений и строгим методом кинетических уравнений, слишком громоздок и не входит в задачу авторов книги. Следует иметь в виду, что (как уже отмечалось) для большого круга проблем в физике плазмы (например, связанных с колебаниями и волнами) правая часть кинетического уравнения не существенна, если речь идет о поведении плазмы за времена, значительно меньшие времени свободного пробега.

### § 1.10. Гидродинамическое описание плазмы

Для понимания многих плазменных процессов очень полезной оказывается гидродинамическая модель плазмы, в которой плазма изображается как смесь электронной и ионной жидкостей. Эта модель применима для плазмы, у которой характерный линейный размер  $L$  во много раз превосходит длину свободного пробега  $l$ , а характерная длительность процессов  $t_p$  велика по сравнению со временем между двумя столкновениями  $\tau$ . Величины  $L$  и  $t_p$  обратно пропорциональны скорости изменения функции распределения частиц в пространстве и во времени:  $1/L \sim (1/f) (\partial f / \partial x)$ ,  $1/t_p \sim (1/f) (\partial f / \partial t)$ . В этом случае, как было показано ранее, функцию распределения  $f$  для каждой компоненты плазмы можно разложить по малому параметру  $l$  или  $\tau$ . В нулевом приближении

$$f = f_0 = (m/2\pi T)^{1/2} n \exp(-m(v-u)^2/2T),$$

где  $n = n(x, t)$ ;  $T = T(x, t)$ ;  $u = u(x, t)$  (для простоты ограничиваемся одномерной задачей). В гидродинамической модели вся информация о локальных свойствах любой компоненты содержится в трех величинах: плотности  $n$ , температуре  $T$  и средней скорости  $u$ , которые пока остаются произвольными функциями  $x$  и  $t$ . Подставляя в кинетическое уравнение разложение для  $f$  ( $f = f_0 + f_1 + \dots$ ), получаем в нулевом приближении

$$\partial f_0 / \partial t + v \partial f_0 / \partial x + (qE/m) \partial f_0 / \partial v = \text{St}\{f\}. \quad (1.99)$$

Здесь в правой части оставлен интеграл столкновений для полной функции распределения  $f$ , поскольку  $\text{St}\{f_0\} = 0$ , а  $\text{St}\{f\}$  имеет нулевой порядок относительно параметра малости  $\tau/t_p$ \*. В данном слу-

\*  $\text{St}\{f\}$  не является аддитивной функцией аргумента, и поэтому нельзя написать  $\text{St}\{f\} = \text{St}\{f_0\} + \text{St}\{f_1\} + \dots$

чае в уравнении (1.99) мы имеем в виду строгое выражение интеграла столкновений, а не упрощенный вид в  $\tau$ -приближении. При этом нас не должно смущать, что в строгом виде интеграл столкновений весьма громоздок. Как будет видно из дальнейшего, совсем не обязательно знать явный вид интеграла столкновений, можно использовать лишь некоторые его общие свойства — законы сохранения. Ограничимся вначале анализом поведения электронной и ионной компонент плазмы. Процессы ионизации и рекомбинации, вызывающие появление или исчезновение новых заряженных частиц, при этом учитывать не будем.

Чтобы построить гидродинамическую модель, проинтегрируем уравнение (1.99) для выбранной компоненты по всему пространству скоростей. Интегралы от двух первых членов уравнения (1.99) представим в следующем виде:

$$\int (\partial f_s / \partial t) dv = \partial \left( \int f_s dv \right) / \partial t = \partial n_s / \partial t;$$

$$\int v (\partial f_s / \partial x) dv = \partial \left( \int v f_s dv \right) / \partial x = \partial (n v) / \partial x.$$

Здесь изменен порядок дифференцирования по  $t$  и  $x$  соответственно и интегрирования по  $dv$ , так как в кинетической теории  $t$ ,  $x$ ,  $v$  — независимые переменные. При интегрировании третьего члена уравнения (1.99) по частям получается тождественный нуль:

$$\int (\partial f_s / \partial v) dv \equiv 0.$$

Даже без конкретизации вида интеграла столкновений ясно, что при отсутствии ионизации и рекомбинации полное число частиц сохраняется.

Итак, имеем уравнение непрерывности

$$\partial n / \partial t + \partial (n v) / \partial x = 0. \quad (1.100)$$

Умножим теперь уравнение (1.99) на  $v$  и опять проинтегрируем. Поступая так же, как и при выводе (1.100), получаем

$$\partial (n v) / \partial t + \partial \left( \int v^2 f_s dv \right) / \partial x - (q E / m) n = \int v \text{St} \{f\} dv. \quad (1.101)$$

Если для обеих компонент плазмы (электронной и ионной) средняя скорость  $u$  одинакова, то интеграл  $\int v \text{St} \{f\} dv$  должен обращаться в нуль, так как не происходит передачи импульса от одной компоненты к другой. При этом условии равенство (1.101) можно с помощью (1.100) привести к виду

$$n m (\partial u / \partial t + u \partial u / \partial x) = -\partial (n T) / \partial x + q E n. \quad (1.102)$$

Это уравнение Эйлера для заряженной жидкости. Заметим, что в общем случае при наличии электрического поля  $u_i \neq u_e$ , и поэтому между компонентами плазмы возникает сила трения. Эту силу, которая для электронной компоненты на единицу объема равна

$$F_{ei} = m_e \int v \text{St} \{f_e\} dv,$$

а для ионной компоненты

$$F_{ie} = -F_{ei} = m_i \int v \text{St}\{f_i\} dv,$$

нужно прибавлять к правой части равенства (1.102). Наконец, умножая уравнение (1.99) на  $v^2$  и еще раз интегрируя, после несложных выкладок с использованием (1.100) и (1.102) получаем

$$\partial T / \partial t + u \partial T / \partial x + 2T \partial u / \partial x = 0. \quad (1.103)$$

Это соотношение найдено в предположении о том, что интегралы  $\int v \text{St}\{f\} dv$  и  $\int v^2 \text{St}\{f\} dv$  равны нулю. Первое условие справедливо при  $u_i = u_e$ , а второе — при  $T_i = T_e$ . Если  $T_i \neq T_e$ , то происходит обмен тепловой энергией между компонентами плазмы и интеграл  $\int v^2 \text{St}\{f\} dv$  не обратится в нуль ни для одной из них.

Уравнение (1.103), очевидно, есть не что иное, как уравнение одномерной адиабаты ( $\gamma = 3$ ). Действительно,

$$n^2 d(p/n^3) / dt = \partial T / \partial t + u \partial T / \partial x + 2T \partial u / \partial x = 0,$$

так как  $p = nT$ , а из (1.100)  $dn/dt = -n \partial u / \partial x$ . Для трехмерного случая в результате аналогичных, но более громоздких вычислений можно получить в векторной форме следующую полную систему уравнений «двухжидкостной» плазменной гидродинамики с учетом сил трения:

$$\left. \begin{aligned} \partial n_i / \partial t + \text{div } n_i \mathbf{u}_i &= 0; \\ \partial n_e / \partial t + \text{div } n_e \mathbf{u}_e &= 0; \end{aligned} \right\} \quad (1.104)$$

$$\left. \begin{aligned} n_i m_i d\mathbf{u}_i / dt &= -\text{grad } n_i T_i + n_i e \mathbf{E} + \mathbf{F}_{ie}; \\ n_e m_e d\mathbf{u}_e / dt &= -\text{grad } n_e T_e - n_e e \mathbf{E} + \mathbf{F}_{ei}. \end{aligned} \right\} \quad (1.105)$$

В уравнениях (1.105)  $d\mathbf{u} / dt = \partial \mathbf{u} / \partial t + (\mathbf{u} \text{ grad}) \mathbf{u}$ . Векторное обозначение  $(\mathbf{u} \text{ grad}) \mathbf{u}$  расшифровывается как вектор с компонентами:

$$\begin{aligned} (u_x \partial u_x / \partial x + u_y \partial u_x / \partial y + u_z \partial u_x / \partial z); \\ (u_x \partial u_y / \partial x + u_y \partial u_y / \partial y + u_z \partial u_y / \partial z); \\ (u_x \partial u_z / \partial x + u_y \partial u_z / \partial y + u_z \partial u_z / \partial z). \end{aligned}$$

Сила трения  $\mathbf{F}$  равна импульсу, передаваемому в единице объема за секунду от частиц одной компоненты плазмы к частицам другой, в  $\tau$ -приближении ее можно записать в следующем виде:

$$\mathbf{F}_{ei} = -n m_e (\mathbf{u}_e - \mathbf{u}_i) \nu_{ei},$$

где  $\nu_{ei}$  — частота столкновений между частицами разного сорта.

Аналог уравнения (1.103) в трехмерном случае имеет вид

$$\partial T / \partial t + \mathbf{u} \text{ grad } T + (2/3) T \text{ div } \mathbf{u} = 0 \quad (1.106)$$

(Ему соответствует показатель адиабаты  $\gamma = 5/3$ .) Заметим, что при выводе уравнений основного гидродинамического приближения из кинетического уравнения не обязательно знать явный вид интеграла столкновений. Нет необходимости также вычислять поправку  $f_1$  в явном виде. Знание этой поправки позволило бы нам



найти диссипативные добавки (вязкость, теплопроводность и т. д.) к уравнениям (1.102), (1.103) и к трехмерным обобщениям (1.105), (1.106), но тогда нужно было бы задаться определенным видом интеграла столкновений. При строгом рассмотрении эта задача является довольно громоздкой. Она упрощается, если интеграл столкновений на этом этапе представить в упрощенной форме  $\tau$ -приближения. Именно так был ранее найден коэффициент теплопроводности.

Следует обратить внимание на то, что уравнения (1.104) и (1.105), образующие основу гидродинамического приближения в теории плазмы, были выведены из более общего кинетического уравнения, однако их можно получить гораздо более простым путем при анализе макроскопических свойств плазмы. Уравнения (1.104) имеют смысл закона сохранения числа частиц каждого сорта, а уравнения (1.105) суть второй закон Ньютона применительно к движению единичного объема — электронной и ионной компонент плазмы — под действием градиентов давления, электрического поля и сил взаимного трения.

В описанной картине плазма является смесью двух взаимодействующих жидкостей, взаимодействующих друг с другом через самосогласованное электрическое поле и силу трения из-за парных соударений. Во многих задачах, когда плазма сохраняет свою квазинейтральность  $n_e = n_i = n$ , удобно пользоваться и более простой моделью одножидкостной гидродинамики. Складывая уравнения (1.105) для ионов и электронов и принимая во внимание, что члены, обусловленные трением между электронной и ионной компонентами, сокращаются, получаем

$$m_i n [\partial \mathbf{u} / \partial t + (\mathbf{u} \text{ grad}) \mathbf{u}] = -\text{grad} (p_i + p_e), \quad (1.107)$$

где

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_i + (m_e/m_i) \mathbf{u}_e \approx \mathbf{u}_i.$$

Это основное уравнение одножидкостной гидродинамики плазмы уже не содержит электрического поля.

Следует подчеркнуть, что в плазме электрическое поле, как правило, возникает и в том случае, если нет внешнего источника. Вообще говоря, согласно условию сохранения квазинейтральности потоки электронов и ионов через любую замкнутую поверхность должны быть равны. Поскольку электроны подвижнее ионов, то при возникновении градиента давления электронный поток из области высокого давления в область более низкого сначала превысит поток ионов. Вследствие этого произойдет поляризация плазмы и появится электрическое поле, которое будет тормозить электроны и ускорять ионы.

До сих пор рассматривался случай полностью ионизованной плазмы. В слабоионизованной среде заряженные частицы, представляющие слабый раствор плазмы, не могут разогнаться под действием собственных градиентов давления вследствие торможе-

ния из-за частых столкновений с нейтральными частицами. Основной вклад в силу трения должны давать столкновения ионов с нейтральными атомами и молекулами:

$$\mathbf{F}_{\text{тр}} = -m_i n v_{i0} \mathbf{u}. \quad (1.108)$$

Когда градиент полного давления плазмы  $\text{grad}(p_i + p_e)$  уравновешивается трением о нейтральный газ, движение плазмы носит характер диффузии. Действительно, из условия баланса силы трения и градиента давления имеем

$$\begin{aligned} -\text{grad } p - m_i n v_{i0} \mathbf{u} &= 0; \\ \mathbf{u} &= -(nm_i v_{i0})^{-1} \text{grad } p. \end{aligned} \quad (1.109)$$

В случае однородности температуры  $T(r) = \text{const}$ , следовательно,

$$\mathbf{u} = -(T/nm_i v_{i0}) \text{grad } n.$$

Подставляя это выражение для скорости в уравнение непрерывности

$$\partial n / \partial t + \text{div } n \mathbf{u} = 0,$$

получаем

$$\partial n / \partial t = (T/m_i v_{i0}) \text{div grad } n. \quad (1.110)$$

Это уравнение описывает диффузионный процесс с коэффициентом диффузии

$$D = T/m_i v_{i0}. \quad (1.111)$$

Закljučая разбор гидродинамического описания плазмы, следует подчеркнуть, что деление плазм на гидродинамические и кинетические было бы в корне ошибочным. Один и тот же плазменный объект в одно и то же время может обнаруживать и гидродинамические, и кинетические (бесстолкновительные) свойства. Так, например, плазма газового разряда в макроскопических масштабах, как правило, достаточно хорошо описывается в рамках гидродинамической модели (включая явления переноса: диффузия, закон Ома и т. д.). Вместе с тем в микроскопических масштабах (с характерными размерами, много меньшими длины свободного пробега) поведение той же плазмы газового разряда всегда носит бесстолкновительный характер. В такой плазме вообще можно пренебрегать обычными столкновениями. К процессам, которые нужно рассматривать в микроскопической шкале, относятся колебания плазмы, распространение электромагнитных волн, затухание волн по Ландау. Таким образом, граница раздела между разными методами описания является границей раздела не видов плазм, а явлений, происходящих в них. Подобно тому как явления с характерными длинами, значительно превышающими длины свободного пробега, составляют особый предмет — гидродинамическое описание плазмы, микроскопические процессы с характерными масштабами, много меньшими длины свободного пробега, составляют самостоятельный раздел физики плазмы — бесстолкновительную плазму, описываемую системой бесстолкновительных кинети-

ческих уравнений. Следует иметь в виду, что кинетическое описание плазмы намного более громоздко, чем описание в рамках гидродинамических уравнений, и было бы крайне тяжело для описания всех бесстолкновительных процессов применять кинетический метод. Однако в некоторых случаях этот метод описания бесстолкновительной плазмы можно существенно упростить путем перехода к уравнениям своеобразной бесстолкновительной гидродинамики. Физическая причина возможности такого перехода совершенно иная, чем в обычной гидродинамике.

Дело в том, что бесстолкновительная гидродинамика обычно применяется для описания волновых и колебательных процессов, когда кроме частоты столкновений возникает еще один характерный временной масштаб — частота колебаний. Если в столкновительном случае переход к гидродинамике, т. е. пренебрежение тепловым движением частиц, означает малость длины свободного пробега  $v_T/v$  по сравнению с характерным пространственным масштабом задачи  $L$ , то в бесстолкновительном случае переход к гидродинамике и пренебрежение тепловым движением возможны при условии малости параметра  $v_T/\omega$  по сравнению с длиной волны  $\lambda$ . Последнее условие фактически означает, что бесстолкновительная гидродинамика применима, если тепловая скорость частиц много меньше характерной скорости возникающих в плазме волновых движений. Система уравнений бесстолкновительной гидродинамики состоит из уравнений (1.104) и (1.105), в которых не учитывается сила трения.

### § 1.11. Звук в плазме

В начале книги говорилось о ленгмюровских колебаниях. Было отмечено, что кроме электронных колебаний существуют также и звуковые (иногда их называют ионно-звуковыми), обусловленные движением ионов. Свойства всех видов колебаний можно исследовать единым методом на основе кинетических уравнений (см. § 1.12). Здесь же мы проведем более простой и наглядный анализ звуковых колебаний плазмы в рамках гидродинамической модели.

Как и в любой сплошной среде, при звуковых колебаниях плазмы роль квазиупругой возвращающей силы играют силы газового давления. В одножидкостной гидродинамике плазмы [см. уравнение (1.107)] давление складывается из суммы электронного и ионного  $p = p_i + p_e$ , и соответственно этому хорошо известное выражение для скорости звука в обычной сплошной среде  $c_s = (\partial p / \partial \rho)^{1/2}$  трансформируется в  $[\partial (p_i + p_e) / \partial \rho]^{1/2}$ . Как обычно, здесь под частной производной подразумевается так называемая адиабатическая производная, вычисляемая при постоянной энтропии. Тогда  $c_s^2 = \gamma (T_e + T_i) / m_i$  при  $\gamma = 5/3$ .

Процессы последовательного сжатия и расширения плазмы в звуковых волнах можно считать адиабатическими, если возни-

кающие при этом перепады температур не успевают выравниваться из-за теплопроводности. Сравним член  $\partial T/\partial t$ , описывающий колебания температуры в уравнении баланса тепла, с членом  $\chi \Delta T$ , описывающим теплообмен. В звуковой волне при  $T \sim \exp [i(kx - \omega t)]$  производная по времени  $\partial T/\partial t = -i\omega T$ , а второй член превращается в  $\chi \Delta T = -\chi k^2 T$ . Тогда условие адиабатичности  $\partial T/\partial t \gg \chi k^2 T$  примет вид  $\omega \gg k^2 \chi$ . Но электронная и ионная компоненты плазмы имеют сильно различающиеся коэффициенты теплопроводности (см. § 1.9). Труднее выполнить условие адиабатичности для электронной компоненты. Неравенство  $\omega \gg k^2 \chi$  можно представить в виде

$$\omega/k \approx (T/m_i)^{1/2} \gg k\chi \approx 2\pi\chi/\lambda, \quad (1.112)$$

где  $\lambda$  — длина волны. Подставляя сюда вместо  $\chi$  электронную теплопроводность  $\chi_e \sim l_e v_{Te}/3$ , получаем неравенство

$$\lambda \gg (2\pi l_e/3) (m_i/m_e)^{1/2}. \quad (1.113)$$

Это значит, что полностью адиабатическими являются только звуковые колебания с длиной волны, по крайней мере на два порядка большей длины свободного пробега электронов. При обратном условии

$$l_e (m_i/m_e)^{1/2} \gg \lambda, \quad (1.114)$$

но при  $\lambda \gg l_e$  звук изотермичен для электронной компоненты, но адиабатичен для ионной. Выражение для скорости звука в этом случае можно записать так:

$$c_s = (T_e/m_i + (5/3)T_i/m_i)^{1/2}. \quad (1.115)$$

Таким образом, аналогия со звуком в обычном сжимаемом газе не является полной из-за двухкомпонентности плазмы. Однако по настоящему аномальные свойства плазмы проявляются при еще более коротких длинах волн. Обычный звук с приближением длины волны к длине свободного пробега начинает все сильнее затухать (из-за вязкости и теплопроводности) и при условии  $\lambda \ll l$  вообще не может существовать. Ясно, что любое возмущение плотности в свободномолекулярном потоке рассеивается из-за теплового движения отдельных частиц. В плазме же при отсутствии парных столкновений частицы взаимодействуют через самосогласованное электрическое поле. Подобно тому как электрическое поле такого типа приводит к ленгмювским колебаниям электронов, возникает возможность существования и колебаний звукового типа, в которых участвуют и ионы, если частоты колебаний настолько малы, что ионы успевают реагировать на изменения поля.

Таким образом, упругая связь между электронной и ионной компонентами в коротковолновом звуке осуществляется благодаря возникновению электрического поля, а температуры электронов и ионов в такой звуковой волне остаются постоянными.

Сделаем небольшое отступление и отметим одно общее обстоятельство, весьма важное для волновых процессов в плазме. Вообще говоря, как и в любой физической системе, колебания в плаз-

ме являются нелинейными. Однако исследование волновых и колебательных процессов в плазме целесообразно начать с линейной теории. В линейной теории рассматриваются колебания плазмы достаточно малой амплитуды, соответствующие малым возмущениям исходного равновесного состояния плазмы, на фоне которого они развиваются. В кинетической теории малость амплитуды колебаний означает, что возмущение функции распределения, связанное с колебаниями и волнами, во всей физически важной области скоростей мало по сравнению с исходной равновесной функцией распределения:  $f=f_0+\delta f$ ,  $\delta f \ll f_0$ . Соответственно этому в гидродинамической теории следует считать, что все физические величины, связанные с колебаниями и волнами, также достаточно малы:

$$\delta n \ll n_0, \quad e\varphi \ll \max(T, m\omega^2/k^2), \quad \delta u \ll \omega/k, \quad \xi \ll 1/k,$$

где  $\delta n$  — возмущение плотности в колебаниях;  $\varphi$  — их характерный потенциал;  $\delta u$  и  $\xi$  — характерное значение скорости и смещения частиц в колебаниях соответственно. Поэтому основная математическая процедура, которая превращает общие уравнения колебаний, будь то кинетические уравнения или уравнения гидродинамики, в уравнения линейной теории, — это процедура линеаризации. Линеаризация означает, что все физические величины, характеризующие состояние плазмы, представляются в виде суммы их равновесного значения и возмущения, связанного с колебаниями и волнами, и в исходных уравнениях пренебрегается слагаемыми второго и более высокого порядка по амплитуде возмущений.

Вернемся теперь к рассмотрению бесстолкновительного звука, ограничившись в этом параграфе линейной теорией. Можно ожидать, что, как и в столкновительном случае, рассматриваемая звуковая волна достаточно медленная — ее фазовая скорость много меньше тепловой скорости электронов. Фактически это означает, что возмущение, создаваемое волной, является квазистатическим для электронов и в изменяющемся со временем электрическом поле волны они всякий раз успевают «подстроиться» под стационарное распределение Больцмана:

$$n_e = n_0 \exp\{e\varphi/T_e\}. \quad (1.116)$$

Для колебаний малой амплитуды следует, как мы уже знаем, линеаризовать эту формулу. В результате линеаризации находим, что возмущение электронной плотности связано с потенциалом волны следующим соотношением:

$$\delta n_e = n_0 e\varphi/T_e. \quad (1.116a)$$

Для ионов, наоборот считаем выполненным условие  $\omega/k \gg v_{Ti}$ . Как отмечалось выше, это и есть условие применимости бесстолкновительной гидродинамики. Поэтому движение ионов в бесстолкновительной звуковой волне будем рассматривать с помощью линеаризованной по амплитуде возмущений гидродинамической

системы уравнений без силы трения:

$$\left. \begin{aligned} m_i \partial u_i / \partial t &= -e \partial \phi / \partial x - (T_i / n_i) \partial \delta n_i / \partial x; \\ \partial \delta n_i / \partial t + n_i \partial u_i / \partial x &\equiv 0. \end{aligned} \right\} \quad (1.117)$$

Сравнивая различные слагаемые в этих уравнениях, нетрудно показать, что силой давления [последнее слагаемое в правой части (1.117)] при выполнении условия  $\omega \gg kv_{Ti}$  можно пренебречь:

Сделаем еще одно дополнительное предположение, а именно будем считать, что длина волны рассматриваемых здесь ионно-звуковых колебаний все же достаточно велика по сравнению с дебаевской. Тогда, поскольку ионно-звуковая волна для электронов является квазистатической, к ней применимы соображения § 1.2 о квазинейтральности плазмы. Отрывать электроны от ионов с помощью их энергии взаимодействия в волне можно только на расстояниях масштаба дебаевской длины. Ионно-звуковые колебания с длинами волн много больше дебаевской длины являются квазинейтральными:  $\delta n_e = \delta n_i = \delta n$ . В этом случае с учетом (1.116а) систему уравнений (1.117) можно записать в виде

$$\left. \begin{aligned} \partial \delta n / \partial t + n_e \partial u_i / \partial x &= 0; \\ m_i \partial u_i / \partial t &= - (T_e / n_e) \partial \delta n / \partial x, \end{aligned} \right\} \quad (1.118)$$

который совпадает с видом линеаризованных уравнений обычной газовой динамики изотермического газа ( $\gamma=1$ ). Фазовая скорость звуковой волны в таком газе равна

$$\omega / k = (T_e / m_i)^{1/2}. \quad (1.119)$$

Но в рассматриваемом здесь случае плазмы звук с таким законом дисперсии является бесстолкновительным. Подобно ленгмюровским колебаниям звук также испытывает бесстолкновительное затухание из-за резонансного взаимодействия с тепловыми частицами плазмы. Физический механизм затухания был разъяснен в § 1.2 на примере ленгмюровских колебаний. Звуковая волна может затухать в результате взаимодействия как с ионами, так и с электронами. Однако поскольку параметр  $\omega / kv_{Ti} = (T_e / T_i)^{1/2}$ , то при выполнении условия  $T_e \gg T_i$  (горячие электроны, холодные ионы) в резонанс со звуковой волной попадает лишь небольшое количество ионов на «хвосте» распределения Максвелла, и затухание на ионах оказывается экспоненциально малым. С ростом ионной температуры все больше и больше ионов может попадать в резонанс. При этом если  $T_i \sim T_e$ , то уже основная масса ионов даст вклад в затухание Ландау ионно-звуковых колебаний, и декремент затухания станет сравним с частотой колебаний, т. е. распространение ионного звука окажется невозможным. Поэтому существование слабозатухающих бесстолкновительных ионно-звуковых колебаний требует неизотермичности плазмы, т. е.  $T_e \gg T_i$ .

Что же касается бесстолкновительного затухания звука на электронах, то его декремент является малым по отношению

к частоте  $\sim (m_e/m_i)^{1/2}$ . Качественно это можно разъяснить следующим образом. Фазовая скорость волны существенно меньше тепловой скорости электронов  $\omega/kv_{Te} \sim (m_e/m_i)^{1/2}$  и резонансное затухание на электронах возникает в той области электронной функции распределения, где ее градиенты  $df/dv$  малы и, как следует из формулы (1.5), см. § 1.2, соответственно мало и бесстолкновительное затухание. Подробно вопрос о бесстолкновительном затухании ионно-звуковой волны рассмотрен в § 1.12.

Отклонение от квазинейтральности в ионном звуке, как уже отмечалось выше, становится существенным на очень малых длинах волн, сравнимых с дебаевской длиной. Распределение электронов в такой коротковолновой ионно-звуковой волне по-прежнему остается бoльцмановским и  $\delta n_e$  определяется формулой (1.117).

Систему уравнений (1.118) для ионов следует дополнить уравнением Пуассона для потенциала ионно-звуковой волны. Получающаяся при этом система уравнений, которая описывает коротковолновый ионный звук, имеет вид

$$\left. \begin{aligned} \partial \delta n_i / \partial t + n_0 \partial \delta u_i / \partial x &= 0; \\ m_i \partial \delta u_i / \partial t &= - (T_e / n_0) \partial \delta n_e / \partial x; \\ \partial^2 \delta n_e / \partial x^2 &= (4\pi e^2 n_0 / T_e) (\delta n_i - \delta n_e). \end{aligned} \right\} \quad (1.120)$$

Подставляя в эти уравнения все волновые величины в виде  $\exp\{i(kx - \omega t)\}$ , приходим к следующему дисперсионному уравнению:

$$\omega^2 = \omega_{pi}^2 k^2 r_D^2 / (k^2 r_D^2 + 1), \quad (1.121)$$

где  $\omega_{pi}^2 = 4\pi e^2 n / m_i$  — квадрат ионной плазменной частоты. В пределе длинных волн  $\lambda \gg r_D$  из уравнения (1.120) следует полученный ранее закон дисперсии (1.119). С уменьшением длины волны становится существенной дисперсия фазовой скорости — фазовая скорость уменьшается при продвижении в область коротких длин волн и, наконец, при  $k \rightarrow \infty$  ( $\lambda \ll r_D$ ) стремится к нулю, а частота ионного звука стремится к ионной плазменной  $\omega_{pi}$ .

Полученный результат имеет весьма простое объяснение. Из-за теплового движения частота электрического поля, действующего на электроны, сдвинута по Доплеру:  $\omega \rightarrow |\omega - kv_{Te}|$ . Для очень коротких длин волн ( $\lambda \ll r_D$ )  $kv_{Te} \gg \omega_{pe}$ , т. е. эффективная частота поля, действующего на «средний» электрон, существенно больше электронной плазменной частоты, и электроны не успевают участвовать в колебаниях. В результате для столь коротких длин волн плотность электронов остается практически невозмущенной и мы вновь получаем ленгмюровские колебания зарядов одного знака относительно зарядов другого знака, так же как и в высокочастотных ленгмюровских колебаниях (см. § 1.2). Единственное различие состоит в том, что если в высокочастотных колебаниях происходят колебания электронного заряда относительно неподвижных ионов, то в коротковолновом ионном звуке ионный заряд

колеблется на электронном фоне и соответственно этому частота этих колебаний совпадает с ионной плазменной.

Результаты проведенного в книге исследования колебаний изотропной плазмы суммированы на рис. 1.11. Кроме электромагнитной волны  $\omega^l = (\omega_{pe}^2 + k^2 c^2)^{1/2}$  в такой плазме существуют две ветви чисто продольных колебаний. Это высокочастотные ленгмюровские колебания  $\omega^l = (\omega_{pe}^2 + 3k^2 v_{Te}^2)^{1/2}$  и низкочастотные ионно-звуковые колебания с законом дисперсии  $\omega^s(k)$ , определяемым формулой (1.121). В этих

формулах индекс  $l$  относится к электромагнитной волне (от слова *transversal* — поперечный), индекс  $l$  — к продольной плазменной волне (от слова *longitudinal* — продольный), индекс  $s$  — к ионно-звуковой волне (от слова *sound* — звук). Обратим здесь внимание на существование достаточно глубокой аналогии между продольными колебаниями в плазме и упругими колебаниями атомов и ионов в узлах кристаллической решетки.

Роль электрических сил, возникающих при колебаниях заряда в плазме, в решетке выполняют упругие силы, возвращающие атомы (ионы) к положениям равновесия. При этом, например, в двухатомной решетке существуют две ветви колебаний — оптическая ветвь, в которой атомы (либо ионы) разных сортов при колебаниях движутся навстречу друг другу и которая аналогична колебаниям плотности заряда — ленгмюровским колебаниям в плазме, и акустическая ветвь, в которой атомы (ионы) смещаются в одном направлении и которая аналогична ионно-звуковым колебаниям плазмы.

До сих пор при рассмотрении колебаний плазмы мы использовали гидродинамическую систему уравнений. В следующем параграфе излагается кинетическая теория колебательных и волновых процессов в плазме. Такой подход позволяет не только получить с единой точки зрения все уже известные нам ветви колебаний, но и количественно строго рассмотреть эффект резонансного взаимодействия колебаний с частицами. По этой причине кинетическая теория имеет крайне важное значение в теории коллективных взаимодействий в плазме.

### § 1.12. Кинетическая теория волн в плазме

Наиболее важной демонстрацией метода самосогласованного поля и кинетической теории плазмы является вывод дисперсионного соотношения для различных типов колебаний плазмы с по-

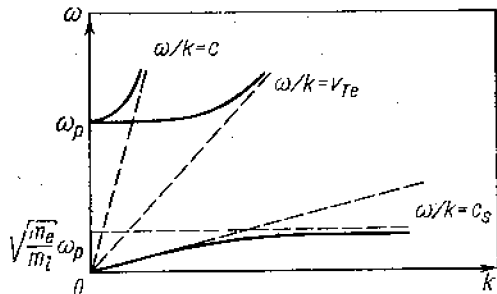


Рис. 1.11. Ветви колебаний в однородной изотропной плазме



мощью бесстолкновительного кинетического уравнения. Предположим, что распространение плоской монохроматической волны с частотой  $\omega$  и волновым числом  $k$  сопровождается появлением (из-за поляризации плазмы) самосогласованного электрического поля с потенциалом

$$\varphi = \tilde{\varphi} \exp\{ikx - i\omega t\}.$$

Также как и в гидродинамической модели малых колебаний, в кинетической теории используется метод линеаризации. Функцию распределения ионов (электронов) ищем в виде

$$f_i = f_{0i}(v) + \delta f_i(x, v, t).$$

Здесь  $f_{0i}$  — функция распределения в равновесном состоянии (невозмущенная). Поправку  $\delta f_i$ , связанную с предполагаемой звуковой волной, считаем малой. Тогда кинетическое уравнение для нее примет вид

$$\partial \delta f_i / \partial t + v \partial \delta f_i / \partial x - (e/m_i) (\partial \varphi / \partial x) \partial f_{0i} / \partial v = 0 \quad (1.122)$$

(в последнем слагаемом слева мы пренебрегли нелинейным членом  $(e/m_i) (\partial \varphi / \partial x) \partial \delta f_i / \partial v$ , поскольку он имеет второй порядок малости). Из уравнения (1.122) видно, что  $\delta f_i$  пропорционально  $\varphi$  и, следовательно, также ведет себя как  $\exp[i(kx - \omega t)]$ . Подставляя в (1.122)  $\delta f_i = \tilde{\delta f}_i \exp\{i(kx - \omega t)\}$ , получаем

$$-i(\omega - kv) \tilde{\delta f}_i - (e/m_i) ik \tilde{\varphi} \partial f_{0i} / \partial v = 0. \quad (1.123)$$

Таким образом, возмущение плотности ионов

$$\delta n_i = \int \tilde{\delta f}_i dv = - (e/m_i) k \tilde{\varphi} \int \frac{\partial f_{0i} / \partial v}{\omega - kv} dv. \quad (1.124)$$

Рассуждая точно так же, для возмущения плотности электронов можно написать

$$\delta n_e = (e/m_e) k \tilde{\varphi} \int \frac{\partial f_{0e} / \partial v}{\omega - kv} dv. \quad (1.125)$$

По сравнению с формулой (1.124) здесь заменены все индексы ионов (заряд и масса). Теперь воспользуемся тем, что электрический потенциал и пространственный заряд  $e(\tilde{\delta n}_i - \tilde{\delta n}_e)$  связаны уравнением Пуассона

$$k^2 \tilde{\varphi} = 4\pi e (\tilde{\delta n}_i - \tilde{\delta n}_e). \quad (1.126)$$

Выразив плотность заряда с помощью (1.124) и (1.125) и подставив в (1.126), получим следующее уравнение:

$$k^2 = - \frac{4\pi e^2}{m_i} k \left\{ \int \frac{\partial f_{0i} / \partial v}{\omega - kv} dv + \frac{m_i}{m_e} \int \frac{\partial f_{0e} / \partial v}{\omega - kv} dv \right\}, \quad (1.127)$$

эквивалентное обращению в нуль диэлектрической проницаемости плазмы:

$$\epsilon_0(\omega) = \epsilon_i + \epsilon_e + 1 = 1 + (4\pi e^2/m_i k^2) \left\{ \int \frac{k df_{oi}/dv}{\omega - kv} dv + \right. \\ \left. + \frac{m_i}{m_e} \int \frac{k df_{oe}/dv}{\omega - kv} dv \right\}, \quad (1.128)$$

где  $\epsilon_e$ ,  $\epsilon_i$  — вклад электронов и ионов в диэлектрическую проницаемость. Конкретный вид  $\epsilon_e$  и  $\epsilon_i$  очевиден из соотношения (1.128).

Уравнение (1.127), которое в неявном виде содержит зависимость  $\omega = \omega(k)$  — закон дисперсии, называется общим дисперсионным уравнением колебаний плазмы без магнитного поля. Из уравнения (1.127) можно вывести ранее исследованные свойства всех видов продольных колебаний плазмы.

Рассмотрим сначала звуковые колебания. Прежде всего приведем оба слагаемых в фигурных скобках правой части уравнения (1.127) к более простому виду. Начнем со второго слагаемого, представляющего собой вклад электронов. В предыдущем параграфе показано, что средняя тепловая скорость электронов намного больше фазовой скорости звуковых волн  $\omega/k \ll v_{Te}$  (или  $\omega \ll kv_{Te}$ ). По этой причине в основной области интегрирования в знаменателе подынтегрального выражения  $1/(\omega - kv)$  для электронов можно пренебречь  $\omega$  по сравнению с  $kv$ . Упрощенный интеграл  $\int (\partial f_{oe}/\partial v) dv/v$  для максвелловского распределения электронов по скоростям  $f_{oe} = n_0 (m_e/2\pi T_e)^{1/2} \exp(-m_e v^2/2T_e)$  равен  $-n_0 m_e/T_e$ , т. е.  $\epsilon_e = 1/k^2 r_D^2$ .

При вычислении «ионного» интеграла (первое слагаемое в фигурных скобках) следует предположить, что фазовая скорость волн существенно превышает среднюю тепловую скорость ионов  $\omega \gg kv_{Ti}$ . Согласно § 1.11 это условие выполняется лишь в плазме с холодными ионами  $T_i \ll T_e$ . Если в знаменателе выражения для ионов в формуле (1.126) пренебречь  $kv$  по сравнению с  $\omega$ , то интеграл тождественно обратится в нуль. Следовательно, нужно удержать второй член в разложении

$$1/\omega - kv = 1/\omega + kv/\omega^2 + \dots$$

В результате получаем

$$\int (\partial f_{oi}/\partial v) (kv/\omega^2) dv = - (k/\omega^2) \int f_{oi} dv = - kn/\omega^2,$$

что приводит к следующей формуле для  $\epsilon_i$ :  $\epsilon_i = -\omega_{pi}^2/\omega^2$ .

Подставив в (1.127) полученные выражения для интегралов, представим дисперсионное уравнение в виде

$$k^2 = (4\pi e^2 n/m_i) \{ k^2/\omega^2 - m_i/T_e \}. \quad (1.129)$$

Нетрудно убедиться, что результат полностью совпадает с дисперсионным уравнением бесстолкновительных звуковых колебаний,

которое получено ранее при гидродинамическом рассмотрении (1.121).

Физический смысл бесстолкновительного затухания воли в плазме детально исследовался в § 1.2 на примере ленгмюровских колебаний. Бесстолкновительное затухание своим возникновением обязано поглощению энергии волны частицами, движущимися со скоростью равной фазовой и поэтому длительное время сохраняющими фазовый резонанс с волной. Поэтому при рассмотрении количественной стороны эффекта естественно использовать закон сохранения энергии в системе волна — резонансные частицы. Для его вывода обратимся к дисперсионному уравнению (1.127). Учтем, что диэлектрическая проницаемость плазмы, которая определяется интегралами по скоростям частиц, входящими в правую часть (1.127), в действительности имеет небольшую мнимую часть, математическая причина ее возникновения — наличие особенности (полюса) подынтегрального выражения в точке  $v = \omega/k$ . Появление мнимой части диэлектрической проницаемости как раз и приводит к возникновению бесстолкновительного затухания волны. Разобьем диэлектрическую проницаемость на действительную и мнимую части:

$$\epsilon(\omega, k) = \epsilon'(\omega, k) + i\epsilon''(\omega, k).$$

Тогда действительная часть частоты  $\omega'(\omega = \omega' + i\gamma)$  будет решением действительной части дисперсионного уравнения:

$$\epsilon'(\omega', k) = 0.$$

Уравнение для  $\gamma$  — это мнимая часть дисперсионного уравнения. При  $\gamma \ll \omega'$ , т. е. при  $\epsilon'' \ll \epsilon'$ , уравнение

$$\text{Im } \epsilon'(\omega) + \epsilon''(\omega) = 0$$

можно привести к виду

$$\gamma \partial \epsilon' / \partial \omega' = -\epsilon''(\omega'), \quad (1.130)$$

разложив  $\epsilon'(\omega + i\gamma)$  в ряд с точностью до первого члена по  $i\gamma/\omega$ . Домножим обе части уравнения (1.130) на  $\omega |E|^2 / 4\pi$ . Тогда, учитывая, что

$$d|E|^2/dt = 2\gamma |E|^2,$$

а диэлектрическая проницаемость  $\epsilon$  связана с проводимостью  $\sigma$  соотношением  $\epsilon = i4\pi\sigma/\omega$ , представим уравнение для  $\gamma$  в следующем виде:

$$d/dt \omega \partial \epsilon / \partial \omega \langle E^2 / 8\pi \rangle = -\text{Re } \sigma \langle E^2 \rangle. \quad (1.131)$$

Здесь угловые скобки означают усреднение по длине волны колебаний. Это уравнение выражает закон сохранения энергии в системе волна — резонансные частицы. Величина

$$\omega = \omega \partial \epsilon / \partial \omega \langle E^2 / 8\pi \rangle \quad (1.132)$$

имеет смысл энергии монохроматической продольной волны, которая складывается из потенциальной энергии (энергии электриче-

ского поля) волны  $\omega_{\text{пот}} = \langle E^2/8\pi \rangle$  и энергии колебаний частиц  $\omega_{\text{но.л.}}$ . Используя приведенные выше выражения для  $\epsilon_0$  и  $\epsilon_i$ , для энергии ионно-звуковой волны получаем

$$\omega = 2(\omega_{pi}^2/\omega^2)\langle E^2/8\pi \rangle. \quad (1.133)$$

Вклад в эту энергию дают кинетическая энергия колебаний ионов

$$\langle n_0 m_i \delta u_i^2 / 2 \rangle = \omega_{pi}^2 / \omega^2 \langle E^2 / 8\pi \rangle,$$

колебательная энергия электронов

$$\langle \delta n e \phi \rangle = (1/k^2 r_D^2) \langle E^2 / 8\pi \rangle$$

(считалось, что только квадратичные по амплитуде волны величины имеют отличное от нуля среднее значение, и в соответствии с этим оставлено под знаком среднего только слагаемое, пропорциональное  $\delta n$ ), и, наконец, потенциальная энергия волны  $\langle E^2/8\pi \rangle$ . Для длинноволновых ионно-звуковых колебаний основной вклад в энергию обусловлен колебательной энергией частиц — естественный результат, поскольку для длинноволновой звуковой волны с малым разделением зарядов электрическое поле также мало, иначе говоря, плазма почти квазинейтральна.

Изменение во времени энергии волны определяется диссипацией, связанной с взаимодействием волна — резонансные частицы.

Диссипируемая мощность пропорциональна  $\text{Re } \sigma$ , и ее можно представить в виде работы поля волны  $E$  над резонансными частицами:  $\text{Re } \sigma E^2 = \langle j^{\text{рез}} E \rangle$ .

Возвращаясь к амплитуде потенциала электростатической волны  $\phi_k$ , закон сохранения энергии в системе волна — резонансные частицы запишем в следующей форме:

$$\frac{d}{dt} |\phi_k|^2 = - \frac{16\pi}{k^2 \omega \partial \epsilon / \partial \omega} \langle j^{\text{рез}} E \rangle. \quad (1.134)$$

Диссипация энергии волны, связанная с резонансными частицами, как ясно из приведенного выше вывода, выражается через мнимую часть  $\epsilon(\omega, k)$ , ее легко можно найти из конкретной формулы для  $\epsilon(\omega, k)$  [см. (1.128)]. Мы, однако, проведем здесь независимый вывод формулы для диссипируемой мощности  $\langle j^{\text{рез}} E \rangle$ , поскольку такой вывод проясняет физический смысл бесстолкновительного затухания Ландау.

Ток  $j^{\text{рез}}$  просто выражается через возмущение равновесной функции распределения резонансных частиц

$$j^{\text{рез}} = \sum e \int v \delta f^{\text{рез}} dv,$$

где суммирование проводится по двум сортам частиц — электронам и ионам. Подставляя сюда функцию распределения  $\delta f$  из

уравнения (1.123), можно легко вычислить среднее в правой части уравнения (1.134). Рассмотрим, для примера, ионный вклад:

$$\langle j^{res} E \rangle = \left\langle \left\{ \left( \frac{e^2}{2m_i} \int \frac{\varphi_k k v \partial f_{oi} / \partial v}{kv - \omega} \exp \{i(kx - \omega t)\} + \text{к. с.} \right) \times \right. \right. \\ \left. \left. \times \left\{ -\frac{ik}{2} \varphi_k \exp \{i(kx - \omega t)\} + \text{к. с.} \right\} \right\} = (1/4) \left( \frac{e^2}{m_i} \right) \varphi_k^2 k^2 \int v \partial f_{oi} / \partial v \times \\ \times \left( i / (kv - \omega) - \text{к. с.} \right) dv. \quad (1.135)$$

Здесь проведено усреднение по времени и учтено, что величины  $\delta f$ ,  $\varphi$  — вещественны. Использованное ранее комплексное представление этих величин справедливо только в линейной теории, при вычислении же квадратичных комбинаций, таких как  $\langle jE \rangle$ , в приведенных выше формулах для  $\delta f$  и  $\varphi$  надо прибавить комплексно сопряженные слагаемые и множитель  $1/2$ .

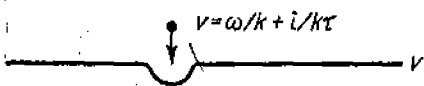


Рис. 1.12. Обход особенности, возникающей в кинетической теории колебаний плазмы из-за резонанса Ландау

Из (1.135) следует, что изменение амплитуды волны связано с резонансной областью скоростей  $v \approx \omega/k$ , в которой имеется особенность подынтегрального выражения. Здесь мы вновь сталкиваемся с одним из типов резонансных плазменных явлений, о которых уже упоминалось в § 1.7. В данном случае речь

идет о резонансе между частицей и волной, фазовая скорость которой совпадает со скоростью частицы  $v = \omega/k$  (резонанс Ландау). Как и раньше, для того чтобы устранить особенность в резонансе, введем в рассмотрение бесконечно малое затухание волны, связанное со столкновениями. Тогда из кинетического уравнения со *stoss*-членом в форме (1.86), следует, что учет столкновений приводит к замене  $\omega \rightarrow \omega + i/\tau$ . Положение полюса  $v = \omega/k + i/\kappa\tau$  смещается с действительной оси в верхнюю полуплоскость. Отсюда следует, что при интегрировании по  $v$  в формуле (1.135) особенность подынтегрального выражения в точке  $v = \omega/k$  надо обходить снизу (рис. 1.12), в результате имеем

$$\lim_{1/\tau \rightarrow 0} 1/(kv - \omega - i/\tau) = \mathcal{P} \{ 1/(kv - \omega) \} + i\pi\delta(kv - \omega). \quad (1.136)$$

Здесь символ  $\mathcal{P}$  — главное значение,  $\delta(x)$  — дельта-функция. Такое направление обхода особенности принято называть правилом обхода Ландау.

Подставляя в (1.135)  $1/(kv - \omega)$  из (1.136), выполняя интегрирование по  $v$  с учетом  $\delta$ -функции и суммируя вклад от ионов и электронов, приходим к следующему уравнению для амплитуды волны:

$$\partial \varphi_k^2 / \partial t = [ 8\pi^2 e^2 / m_i k^2 (\partial \varepsilon / \partial \omega) ] \varphi_k^2 \times \\ \times \{ \partial f_{oi} / \partial v + (m_i / m_e) \partial f_{oe} / \partial v \}_{v = \omega/k} \quad (1.137)$$

Для звуковой волны с законом дисперсии  $\omega = k(T_e/m_i)^{1/2}$ , предполагая равновесные функции распределения электронов и ионов максвелловскими, получаем

$$\gamma \approx -(\pi/8)^{1/2} \omega \{ (m_e/m_i)^{1/2} + (T_e/T_i)^{3/2} \exp(-T_e/2T_i) \}, \quad (1.138)$$

что подтверждает возможность существования слабозатухающей ( $\gamma \ll \omega$ ) звуковой волны в неизотермической ( $T_e \gg T_i$ ) плазме.

Ионно-звуковые колебания плазмы напоминают фононы в металлах. Вместо неравенства  $T_i \ll T_e$  в металлах  $T \ll E_F$  ( $E_F$  — энергия Ферми электронов). Таким образом, роль  $T_e$  играет  $E_F$ . Скорость звука в металлах порядка  $(E_F/m_i)^{1/2}$ , а закон дисперсии напоминает зависимость, показанную на рис. 1.11.

В термодинамически равновесной плазме для ионно-звуковых колебаний устанавливается спектр Рэля — Джинса. Взаимодействие электронов с такими тепловыми шумами звуковых волн дает вклад в длину свободного пробега по сравнению с парными кулоновскими столкновениями (как это было в случае ленгмюровских колебаний). Нетрудно представить, что при неустойчивых ионно-звуковых колебаниях, когда уровень шумов становится достаточно большим, длина свободного пробега может в основном определяться коллективным взаимодействием электронов с ионно-звуковыми колебаниями.

Основная неустойчивость, специфическая для ионного звука, — это неустойчивость, возникающая в плазме с достаточно большим электрическим током. Действительно, в плазме с током электроны должны иметь относительно ионов среднюю скорость  $u_{0e}$ , связанную с плотностью тока соотношением  $j = en_i u_{0e}$ . Тогда функция распределения электронов имеет вид

$$f_{0e} = C \exp[-m_e(v - u_{0e})^2/2T].$$

Используя эту функцию распределения для электронов и предполагая, что ионы сохраняют максвелловское распределение (их токовая скорость в  $m_i/m_e$  раз меньше скорости электронов), получаем из (1.137) следующую формулу для декремента:

$$\gamma = -(\pi/8)^{1/2} \omega \{ (\omega - k u_{0e}) / k (T_e/m_i)^{1/2} + (T_e/T_i)^{3/2} \exp(-T_e/2T_i) \}. \quad (1.139)$$

Видно, что при  $u_{0e} > \omega/k \sim (T_e/m_i)^{1/2}$  вклад электронов в декремент меняет знак, т. е. электроны вместо поглощения могут раскачивать ионно-звуковые колебания. Если ионная температура достаточно мала, то этот эффект перевешивает ионное затухание, и возникает своеобразная когерентная накачка ионного звука электронами.

Развитие такой неустойчивости может привести к резкому возрастанию электрического сопротивления. Но плазма с сильно возбужденными хаотическими ионно-звуковыми колебаниями находится в своеобразном турбулентном состоянии, трудно поддающемся теоретической интерпретации. Основной метод, используе-

мый теоретиками, заключается в представлении подобной турбулентности как некоего газа квазичастиц — волн (в данном случае ионно-звуковых). В такой теории, которая здесь рассмотрена ниже, нелинейные эффекты при больших амплитудах волн интерпретируются как столкновения квазичастиц — волн.

Ионно-звуковая неустойчивость реализуется только при не слишком больших скоростях электронного потока, когда направленная скорость электронов меньше их тепловой скорости. При больших скоростях электронов (больших электрических токах) возникает так называемая неустойчивость Бунемана — раскачка связанных друг с другом колебаний плотности заряда электронной и ионной компонент плазмы.

Известно, что в плазме возможны два типа колебаний плотности заряда: быстрые электронные  $\omega \approx \omega_{pe}$  и медленные ионные  $\omega < \omega_{pi}$ . Если направленная скорость электронов достаточно велика, то в результате доплеровского сдвига частоты возможно своеобразное пересечение этих двух ветвей колебаний. При этом медленные ионные колебания  $\omega \sim \omega_{pi}$  в системе отсчета, движущейся вместе с электронным потоком, попадают в резонанс с быстрыми колебаниями электронной плотности  $|\omega - k u_{0e}| \sim \omega_{pe}$ . В этих условиях и возникает неустойчивость Бунемана. Дисперсионное уравнение для этой неустойчивости, как обычно в случае продольных колебаний, соответствует обращению в нуль диэлектрической проницаемости. Чтобы проиллюстрировать основные черты неустойчивости в терминах диэлектрической проницаемости, достаточно учесть лишь основной вклад ионов и электронов, соответствующий первым членам разложения интеграла (1.127). Результат имеет вид

$$\epsilon = 1 - \omega_{pi}^2 / \omega^2 - \omega_{pe}^2 / (\omega - k u_{0e})^2. \quad (1.140)$$

Для  $\omega \ll k u_{0e}$  последнее слагаемое можно разложить:  $\omega_{pe}^2 / (\omega - k u_{0e})^2 \approx \omega_{pe}^2 / k^2 u_{0e}^2 + 2\omega_{pe}^2 \omega / k^3 u_{0e}^3$ . Подставим это разложение в уравнение (1.140) и рассмотрим его решение для частного выбора волнового числа  $k = \omega_{pe} / u_{0e}$ . Тогда из (1.140) получим

$$\omega^3 = -\omega_{pi}^2 \omega_{pe} / 2. \quad (1.141)$$

Это кубическое уравнение имеет комплексный корень  $\omega = \omega' + i\gamma$  с положительной мнимой частью, соответствующий экспоненциальному росту амплитуды со временем  $E \sim \exp(\gamma t)$ . Инкремент нарастания амплитуды волны, определяемый из (1.141), равен

$$\gamma = (3^{1/2} / 2^{4/3}) \omega_{pi}^{2/3} \omega_{pe}^{1/3}. \quad (1.142)$$

Более строгий анализ исходного уравнения (1.140) показал бы, что это и есть максимум инкремента и достигается он как раз при  $k = \omega_{pe} / u_{0e}$ . С развитием этой неустойчивости связывают резкое торможение электронного потока и, следовательно, механизм так называемого аномального сопротивления (см. § 2.19) плазмы, наблюдающегося при достаточно больших силах тока  $j = en u_{0e} > en v_{те}$ .

С использованием такой неустойчивости можно сконструировать своеобразный линейный ускоритель для ионов в электронном потоке. В этом случае (взаимопроникающие электронный и ионный потоки) неустойчива волна плотности заряда в электронном пучке  $\omega - ku_{0e} \approx -\omega_{pe}$ , одновременно находящаяся в черенковском резонансе с ионным пучком  $\omega \approx ku_{0i}$ . Инкремент неустойчивости определяется формулой (1.142), а частота колебаний находится из уравнения (1.141) с учетом доплеровского сдвига частоты в результате направленного движения ионов:

$$\omega = ku_{0i} + (1/2^{4/3}) \omega_{pi}^{2/3} \omega_{pe}^{1/3}. \quad (1.143)$$

Как следует из (1.143), неустойчивая волна движется быстрее ионного пучка. Поле такой волны и реализует высокочастотное поле линейного ускорителя. В такой волне резонансные частицы (в данном случае ионный пучок) должны ускоряться. При этом, как обычно в линейных ускорителях, процесс непрерывного ускорения должен обеспечиваться поддержанием непрерывного синхронизма между волной и ускоряемыми частицами:  $u_i(z) = \omega/k(z)$ .

Воспользовавшись также приведенным выше условием резонанса неустойчивой волны с электронным пучком и тем, что  $\omega \ll \omega_{pe}$ , условие синхронизма можно переписать в виде

$$u(z) = u_{0e} \omega / \omega_{pe}(z). \quad (1.144)$$

Если мощность, поглощаемая от электронного пучка, достаточно мала, то ток в пучке должен сохраняться:  $n_e u_{0e} = \text{const}$ . Поскольку, кроме того, частота ускоряющей волны постоянна  $\omega = \text{const}$ , а при нерелятивистских энергиях скорость ускоряемых ионов  $u$  растет, как обычно в линейных ускорителях, пропорционально  $z^{1/2}$ , то видно, что синхронизм между ионами и ускоряющей их волной может быть легко обеспечен за счет профилированного изменения плотности в электронном пучке:

$$n_e \sim 1/z^{1/2}. \quad (1.144a)$$

Вообще, рассмотренная выше схема в значительной степени аналогична линейному ускорению. Основное отличие состоит в том, что мощность, необходимая для ускорения, не вводится в ускоритель извне, а из-за неустойчивости черпается от электронного пучка в самом процессе ускорения (так называемый коллективный метод ускорения).

Механизму неустойчивости Бунемана можно дать еще одну важную трактовку. Для волны плотности заряда в электронном пучке  $\omega - ku_{0e} \approx -\omega_{pe}$  производная  $\partial \varepsilon / \partial \omega \approx -2/\omega_{pe}$ , т. е. отрицательна. Из формулы (1.132) следует, что в этом случае энергия волны отрицательна. Так называемая отрицательность энергии волны означает, что при распространении такой волны в среде энергия среды (в данном случае электронного потока) уменьшается. Тогда любой механизм диссипации (в рассмотренном здесь примере это ускорение ионов) должен приво-



дуть к дальнейшему уменьшению энергии среды, а следовательно, и к росту амплитуды волны отрицательной энергии, т. е. к неустойчивости. Этот результат следует также из уравнения (1.134) для амплитуды волны: диссипация ( $\text{Re } \sigma > 0$ ) в случае волны «отрицательной энергии»  $\partial \epsilon / \partial \omega < 0$  приводит к неустойчивости  $(d/dt) E^2 > 0$ .

В этом смысле рассмотренная неустойчивость является примером достаточно широкого класса неустойчивостей волн с отрицательной энергией. Волны отрицательной энергии возможны в неравновесных средах с запасом свободной энергии, таких, например, как электронные пучки. Диссипация энергии этих волн (в плазме такая диссипация может быть связана не только со столкновениями, но и с затуханием Ландау) является причиной неустойчивости. Неустойчивости волн отрицательной энергии также хорошо известны в радиофизике (резистивные генераторы и усилители на поглощении). В последнем случае механизм диссипации связан с поглощением электромагнитной энергии в стенках резонатора или волновода.

### § 1.13. Кинетическая теория волн в плазме (ленгмюровские колебания)

Рассмотрим свойства высокочастотных электронных (ленгмюровских) колебаний на основе дисперсионного уравнения (1.127). В этом случае речь идет о быстрых волнах с фазовой скоростью, существенно большей тепловой скорости электронов; что же касается ионов, то они не успевают участвовать в таких колебаниях из-за их большой массы. Поэтому для ленгмюровских колебаний в уравнении (1.127) достаточно ограничиться электронным вкладом. В знаменателе соответствующего интеграла в (1.127)  $\omega \gg kv$  — по крайней мере для скорости электронов порядка средней тепловой, т. е. в существенной области интегрирования по скоростям. Тогда для вычисления интеграла можно воспользоваться разложением

$$1/(\omega - kv) = 1/\omega + kv/\omega^2 + (kv)^2/\omega^3 + (kv)^3/\omega^4. \quad (1.145)$$

Подстановка (1.145) в электронный интеграл в дисперсионном уравнении (1.127) и последующее интегрирование по частям приводят к следующим результатам:

$$(1/\omega) \int \partial f_{0e} / \partial v dv \equiv 0$$

( $f_0$  обращается в нуль на пределах интегрирования  $v \rightarrow \pm \infty$ );

$$(k/\omega^2) \int v \partial f_{0e} / \partial v dv = -(k/\omega^2) n;$$

$$(k^2/\omega^3) \int v^2 \partial f_{0e} / \partial v dv \equiv 0$$

( $\partial f_{0e} / \partial v$  — начальная функция как производная от максвелловской функции распределения);

$$(k^3/\omega^4) \int v^3 \partial f_{0e} / \partial v dv = -3(k^3/\omega^4) (T_e/m_e) n.$$

Разложение, аналогичное (1.145) с последующим интегрированием, можно было бы осуществить и с первым интегралом справа в дисперсионном уравнении (1.127). Однако этот член, являющийся результатом учета движения ионов, оказывается в  $m_i/m_e$  раз меньше. Поэтому им можно пренебречь.

В итоге вместо (1.127) получаем

$$k^2 \approx k^2 (\omega_p^2 / \omega^2 + 3\omega_p^2 k^2 (T_e / m_e) / \omega^4) \quad (1.146)$$

и при  $\omega \gg kv_{Te}$  приходим к уже известному закону дисперсии для электронных колебаний плазмы:  $\omega^2 = \omega_p^2 + 3k^2 T_e / m_e$ . Очевидно, что такое дисперсионное уравнение соответствует диэлектрической проницаемости

$$\epsilon = 1 - \omega_p^2 / \omega^2 (1 + 3k^2 (T_e / m_e) / \omega^2).$$

Нетрудно получить формулу для энергии ленгмюровской волны с помощью общей формулы (1.132). В случае ленгмюровской волны с  $kr_D \ll 1$ , когда тепловые поправки малы, эта формула принимает совсем простой вид:

$$W = \langle E^2 / 4\pi \rangle. \quad (1.147)$$

Интересно отметить, что для такой ленгмюровской волны, так же как и для гармонических колебаний в аналитической механике, имеет место так называемая теорема вириала — среднее значение кинетической энергии колебаний частиц

$$W_{\text{кол}} = \langle n_0 m \delta u_e^2 / 2 \rangle = \langle E^2 / 8\pi \rangle$$

равно среднему значению потенциальной энергии волны

$$W_{\text{пот}} = \langle E^2 / 8\pi \rangle.$$

Этот результат также вполне естествен — уже из качественного рассмотрения, проведенного в § 1.2, известно, что высокочастотные ленгмюровские колебания можно рассматривать как гармонические колебания электронов относительно неподвижных ионов.

Декремент затухания ленгмюровских колебаний определяется формулой (1.137), где в данном случае существен только электронный вклад. В результате для декремента затухания получаем выражение, отличающееся от приближенной формулы § 1.2 лишь численным множителем  $\pi/2$ :

$$\gamma = (2\pi^2 e^2 / m_e k^2) \omega \partial f^0 / \partial v \Big|_{v=\omega/k} \quad (1.148)$$

(мы учли, что для ленгмюровских колебаний  $\partial \epsilon / \partial \omega = 2\omega_p^2 / \omega^3 \approx 2/\omega$ ). Для плазмы с максвелловским распределением по скоростям из (1.148) имеем формулу для декремента затухания, впервые полученную Л. Д. Ландау:

$$\gamma = -(\pi/8)^{1/2} (\omega_p / k^3 r_D^3) \exp\{-3/2 - 1/2k^2 r_D^2\}. \quad (1.149)$$

Подчеркнем интересную особенность затухания Ландау — как всякое явление, описываемое кинетическим уравнением (1.122) без

столкновений и поэтому сохраняющим энтропию (в соответствии с *H*-теоремой Больцмана), такое затухание должно быть обратимым. Для того чтобы разъяснить это, обратимся еще раз к качественной картине, рассмотренной в § 1.2. Там мы для простоты считали, что потенциал волны имеет прямоугольный профиль (см. рис. 1.2). Для такого идеализированного профиля частицы, захваченные в потенциальную яму волны, т. е. движущиеся достаточно медленно относительно волны

$$|v - \omega/k| \lesssim (e\varphi/m)^{1/2},$$

меняют свою скорость только при столкновении со стенкой потенциального барьера. Для этого случая мы разделили частицы на две группы: частицы, догоняющие волну и, следовательно, теряющие свою энергию при таком столкновении, и частицы, отстающие от волны, а значит, получающие энергию. В максвелловской

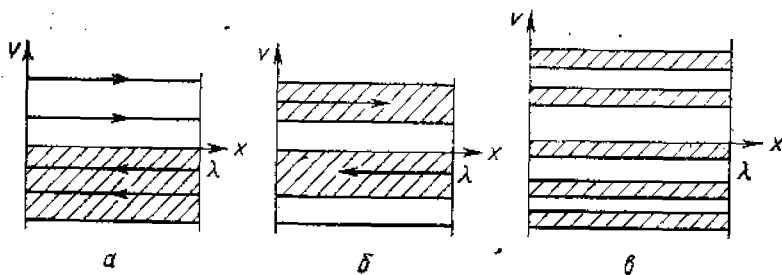


Рис. 1.13. Динамика поведения резонансных электронов на фазовой плоскости

плазме частиц второй группы (т. е. более медленных) больше, поэтому волна затухает. Следует, однако, иметь в виду, что после столкновения эти две группы частиц меняются местами: частицы, которые отставали от волны и которых было больше, теперь опережают волну и при следующем столкновении со стенкой потенциального барьера отдают волне энергию. Поэтому «затухание» меняет знак и является осциллирующей функцией времени с периодом, равным периоду колебаний частицы в потенциальной яме:

$$\tau_0 \sim 1/k(e\varphi/m)^{1/2}. \quad (1.150)$$

Строго говоря, такая картина имеет место только в том случае, когда все захваченные частицы синхронно колеблются в потенциальной яме. В действительности период колебаний частиц в яме зависит от их энергии:  $\tau \sim 1/k|v - \omega/k|$ .

Для того чтобы понять, как это обстоятельство влияет на затухание Ландау, рассмотрим поведение траекторий частиц на фазовой плоскости  $(x, v)$ . Фазовая плоскость для случая частиц, захваченных волной прямоугольной формы, показана на рис. 1.13. Частицы движутся с постоянной скоростью между стенками потенциальной ямы, а затем скачком меняют скорость, переходя

из верхней части фазовой плоскости в нижнюю, и наоборот. Будем считать, что вначале было больше частиц, движущихся медленнее волны, т. е. находившихся в нижней части фазовой плоскости (см. рис. 1.13,а, заштрихованная часть фазовой плоскости). Из бесстолкновительного кинетического уравнения следует, что функция распределения сохраняется при движении частиц (теорема Лиувилля) и поэтому при отражении от границ

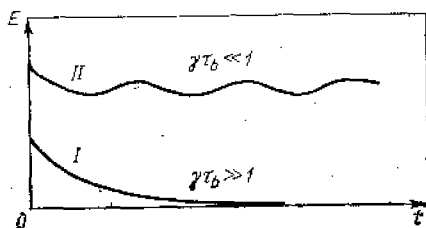


Рис. 1.14. Зависимость от времени амплитуды монохроматической волны: I — волна малой амплитуды, когда существенно затухание Ландау; II — волна большой амплитуды, для которой происходит быстрое выключение затухания в результате фазовых осцилляций резонансных частиц

при отражении от границ потенциальной ямы заштрихованные участки переходят в верхнюю часть фазовой плоскости. Быстрее всего колеблются частицы с большей энергией, и они раньше других перейдут вверх, частицы с меньшей энергией останутся в нижней части плоскости (см. рис. 1.13,б), через несколько периодов колебаний картина фазовой плоскости чрезвычайно усложнится (см. рис. 1.13,в), на котором перемежаются заштрихованные и незаштрихованные участки фазовой плоскости). Вообще, если представить себе две частицы с несколько различающимися энергиями  $\epsilon_1$  и  $\epsilon_2$ , то им будут соответствовать разные периоды колебаний в потенциальной яме  $\Delta t = (dt/d\epsilon) \Delta \epsilon$ . Даже если эти частицы начинают двигаться по своим траекториям с одинаковыми начальными фазами  $\theta = kx$ , то через время  $t \sim \tau^2 / \Delta t$  их фазы разойдутся на величину  $\Delta \theta \sim 1$  и они могут оказаться в разных частях фазовой плоскости. В итоге происходит своеобразное размешивание частиц по всей фазовой плоскости.

Число частиц, движущихся быстрее и медленнее волны, примерно выравнивается, и затухание волны прекращается. Амплитуда волны как функция времени, полученная при точном решении задачи с волной синусоидальной формы, показана на рис. 1.14. Она качественно соответствует рассмотренной здесь упрощенной картине.

В принципе можно представить ситуацию, когда все частицы, двигаясь по своим фазовым траекториям, вновь окажутся, например, в нижней части фазовой плоскости и восстановится затухание. Однако для системы с большим числом частиц вероятность такого события крайне мала (иначе говоря, время «возврата» чрезвычайно велико), и с большой степенью точности можно считать, что в результате фазового размешивания в плазме устанавливается волна постоянной амплитуды. Фазовое размешивание (см. рис. 1.13) приводит к мелкомасштабным осцилляциям на функции распределения. (На этом рисунке все время перемежаются заштрихованные и незаштрихованные участки на фазовой

плоскости.) Рано или поздно масштаб этих шероховатостей становится настолько мелким, что нельзя пренебречь диффузией в пространстве скоростей из-за столкновений: учитываемой в интеграле столкновений в кинетическом уравнении в форме  $\partial(v(T/m)df/dv)/dv$  (см. § 1.9). Так что даже в бесстолкновительной плазме столкновения в конце концов сглаживают шероховатости функции распределения. При таком сглаживании энтропия уже не сохраняется и процесс становится истинно необратимым. Любопытно, что время, в течение которого происходит этот процесс, практически значительно меньше среднего времени столкновений.

Из приведенных рассуждений следует, что рассматривавшееся ранее линейное затухание Ландау существенно только для волны достаточно малой амплитуды, когда  $\gamma t_b \gg 1$ , т. е.  $\gamma/k \gg (e\varphi_0/m_e)^{1/2}$ ,

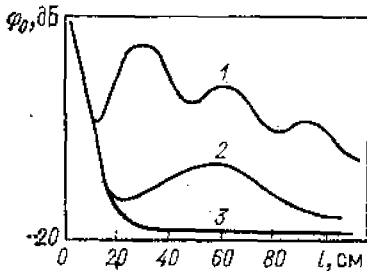


Рис. 1.15. Экспериментальное наблюдение затухания Ландау монохроматической плазменной волны (Wharton С. В., Malmberg J. H., O'Neil T. M. «Phys. Fluids», 1968, v. II, 1761).

На рисунке показано пространственное распределение амплитуды потенциала волны в децибелах как функция расстояния от источника при различных значениях амплитуды вводимого в плазму сигнала. Амплитуда сигнала возрастает при переходе от кривой 3 к 2 и далее к 1. При малых амплитудах (кривая 3) имеет место монотонное затухание сигнала с линейным коэффициентом затухания  $\gamma$ . При больших амплитудах возникают осцилляции амплитуды волны, период этих осцилляций с большой точностью описывается формулой (1.150)

$\gamma/v_{гр}$ , где  $\gamma$  определяется формулой (1.148),  $v_{гр} = 3kr^2_D/\omega_D$  — групповая скорость волны. При больших амплитудах возникают осцилляции амплитуды волны, период этих осцилляций с большой точностью описывается формулой (1.150)

и волна успевает затухнуть, прежде чем проявится эффект осциллирующей декремента. В обратном предельном случае относительное изменение амплитуды  $\Delta E/E \sim \gamma t \ll 1$ , и за несколько периодов колебаний амплитуды в результате фазового размешивания резонансных частиц в плазме устанавливается стационарная нелинейная волна. На рис. 1.15 приведены экспериментальные результаты исследования затухания волны конечной амплитуды.

Фазовая память, сохраняющаяся до тех пор, пока плазма описывается бесстолкновительным кинетическим уравнением, наглядно иллюстрируется эффектом так называемого плазменного эха. Рассмотрим его. Пусть при  $t=0$  в плазме возбуждается ленгмюровская волна  $\exp[i(k_1 x - \omega_1 t)]$ , которая затем затухает из-за механизма Ландау. Эта волна оставляет, однако, незатухающую модуляцию функции распределения в форме  $f_1(v) \exp[i(k_1 x - \omega_1 t)]$ . Действительно, ранее при выводе дисперсионного уравнения (1.127) мы ограничивались частным решением кинетического уравнения, затухающим вместе с волной. Полное же решение кинетического уравнения, удовлетворяющее, к примеру, условию  $\delta f(t=0) = 0$ , имеет вид

$$\delta \tilde{f} = - (e/m_e) ik \left\{ \tilde{\varphi}(t) \frac{\exp[i(kx - \omega t)]}{i(kv - \omega)} - \tilde{\varphi}^{(*)} \frac{\exp[i(kx - \omega t)]}{i(kv - \omega)} \right\} \frac{df_0}{dv} \quad (1.151)$$

[см. (1.123)]. Последнее слагаемое соответствует незатухающей волне модуляции на функции распределения, которая приводит к мелкомасштабным ее осцилляциям как функции скорости с характерным масштабом  $\sim 1/kt$ , неограниченно уменьшающимся с ростом времени. Физически такие осцилляции вполне аналогичны мелкомасштабной структуре функции распределения захваченных частиц, описанной выше. Им не соответствует макроскопическое возмущение плотности и электрическое поле, поскольку интеграл по скорости от  $\delta f$  стремится к нулю при больших временах в результате фазового размешивания. Однако если через доста-

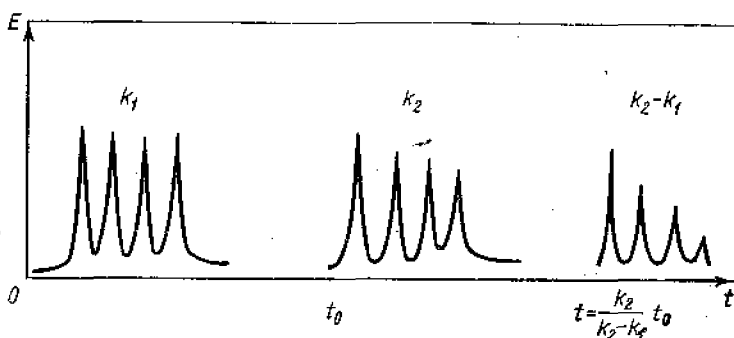


Рис. 1.16. Схема наблюдения явления плазменного эха

точно большое время  $t_0$  после первой волны в плазме создать новую волну  $\exp[i(k_2x - \omega_2t)]$ , которая затем также затухает, то такая волна приведет к модуляции функции распределения в форме  $f_2(v) \exp[ik_2x - ik_2v(t-t_0)]$ . Модулироваться будет и возмущенная часть функции распределения, так что на ней возникнут биения

$$f_1(v)f_2(v) \exp[i(k_2 \pm k_1)x] \exp[ik_2vt_0 - i(k_2 \pm k_1)vt]. \quad (1.152)$$

Эффект эха имеет место для биения с разностным волновым числом  $k_2 - k_1$  и состоит в следующем. В момент времени

$$t = t_0 k_2 / (k_2 - k_1) > t_0 \quad (1.153)$$

происходит своеобразная фазировка: взаимная компенсация фаз отдельных множителей в (1.152), и фаза биения перестает зависеть от  $v$ . В результате модуляция функции распределения в форме (1.152) приводит в этот момент времени к возмущению макроскопических величин — плотности электронного заряда, а следовательно, и электрического поля. Типичная схема наблюдения плазменного эха показана на рис. 1.16. Первые два импульса электрического поля при  $t=0$  и  $t=t_0$  возбуждаются от внешнего источника. Третий импульс — отклик плазмы, связанный с описанной выше фазировкой волн модуляции ее функции распределения. Эффект плазменного эха в значительной степени аналогичен явле-

ниям эха (спиновое, циклотронное) в неплазменных средах. В каждом из них затухание макроскопически наблюдаемой физической величины, связанное с фазовым размещиванием быстро осциллирующих микроскопических элементов (мелкомасштабные осцилляции функции распределения в плазменном эхо, прецессирующие ядерные магнитные моменты в спиновом эхо, ларморовское вращение электронов в циклотронном эхо), обращается во времени путем соответствующего воздействия на направление фазовой эволюции микроскопических элементов. Такое обращение достигается, как мы видели, в результате второго импульса плазменных колебаний или высокочастотного излучения, фазирующего микроскопические элементы.

### § 1.14. Пучковая неустойчивость

Проведем анализ одного важного следствия формулы (1.148) для декремента затухания Ландау плазменных колебаний. Из этой формулы следует, что затухание колебаний, обусловленное обменом энергией с резонансными частицами, реализуется только в том случае, когда функция распределения резонансных частиц есть

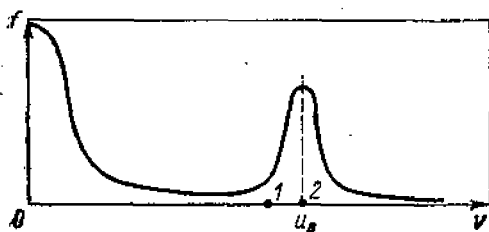


Рис. 1.17. Функция распределения электронов по скоростям для системы плазма — пучок

могут иметь дополнительный максимум для значения  $v_e$ , отличного от нуля. Этот случай изображен на рис. 1.17. Волна, фазовая скорость которой лежит вблизи второго максимума функции распределения между точками 1 и 2, раскачивается электронным пучком. Механизм раскачки — все тот же резонансный обмен энергией между волной и частицами, который в данном случае из-за выполнения условия  $df/dv(v = \omega/k) > 0$ , т. е. преобладания в исходном состоянии частиц, движущихся быстрее волны, приводит к росту амплитуды волны. Таким образом, из всего спектра волн, которые вследствие флуктуаций всегда присутствуют в плазме, электронный пучок выделяет узкую спектральную область находящихся с ним в фазовом резонансе волн и интенсивно накачивает энергию в эти волны.

В определенном смысле электронный пучок в плазме можно рассматривать как классический мазер на продольных колебаниях, поскольку фактически механизм неустойчивости связан

монотонно убывающая функция скорости. Это имеет место, например, при максвелловском распределении частиц плазмы по скоростям, когда единственный максимум функции распределения соответствует скорости  $v_e = 0$ .

При наличии в плазме достаточно интенсивного пучка электронов функция распределения по скоростям

с инверсностью заселенности уровней для частиц со скоростями, близкими к фазовой скорости волны (условие  $(df_0/dv)|_{v=\omega/k} > 0$ ).

Скорость нарастания амплитуды плазменных волн, возбуждаемых электронным пучком, определяется формулой (1.148). Из этой формулы, в частности, следует, что для возникновения неустойчивости необходимо, чтобы интенсивность пучка в плазме превышала некоторую минимальную величину или чтобы пучок был сильно надтепловым, т. е. приходился на далекую область «хвоста» максвелловского распределения тепловых частиц плазмы. Очень слабый пучок, очевидно, не сможет повлиять на функцию распределения электронов по скоростям таким образом, чтобы ее производная могла изменить знак. Если же в области скоростей (резонансных с неустойчивыми волнами) можно пренебречь вкладом плазменных частиц, то очевидно, что функцию распределения в резонансной области скоростей можно представить в виде  $f_e \sim n_1/\Delta v$ , где  $n_1$  — плотность пучка;  $\Delta v$  — тепловой разброс в пучке (ширина его функции распределения по скоростям). Производная от функции распределения  $df_e/dv \sim n_1/(\Delta v)^2$ , и в этом случае для инкремента нарастания находим из (1.148) формулу

$$\gamma \sim \omega_p (n_1/n_0) (v^2/(\Delta v)^2), \quad (1.154)$$

которая часто используется для оценок.

Формулы (1.148) и (1.154) описывают неустойчивости пучков с большим тепловым разбросом. Дело в том, что из-за нестационарности волнового процесса, в данном случае роста амплитуды волны при неустойчивости, резонанс волна — частица имеет конечную ширину по скорости  $|v - \omega/k| \sim \gamma/k$ . Именно на такую минимальную ширину по фазовым скоростям размыт пакет волн из-за мнимой части частоты. Формула (1.154), при выводе которой пренебрегалось конечной шириной резонанса волна — частица, относится к случаю сильно размытых пучков, когда тепловой разброс в пучке существенно больше ширины резонанса и для каждой неустойчивой волны на функции распределения пучка выделяется своя небольшая группа резонансных частиц.

В обратном предельном случае  $\Delta v \ll \gamma/k$  весь пучок как целое находится в резонансе с неустойчивой волной. Именно в этом случае следует ожидать развития наиболее сильной пучковой неустойчивости. Дисперсионное уравнение для такой неустойчивости можно получить из общего уравнения (1.127). При вычислении интеграла по скоростям в этом уравнении следует выделить область тепловых скоростей, в которой интеграл по  $v$  вычисляется обычным путем (разложением по параметру  $kv/\omega$ ), и область скоростей пучка, при рассмотрении которой можно считать пучок имеющим  $\delta$ -образное распределение по скоростям:  $f_{0e} = n_1 \delta(v - u_0)$ . Однако нагляднее вывести искомое уравнение по аналогии с дисперсионным уравнением неустойчивости Бунемана, считая электроны пучка своего рода отдельным сортом частиц со своей плаз-



менной частотой  $\omega_b$ :

$$1 = \omega_p^2 / \omega^2 + \omega_b^2 / (\omega - k u_0)^2, \quad (1.155)$$

где  $\omega_b^2 = 4\pi e^2 n_1 / m_e$  — квадрат ленгмюровской частоты в пучке. Применим графический метод анализа корней этого уравнения. График правой части этого уравнения  $F(\omega, k)$  при фиксированном

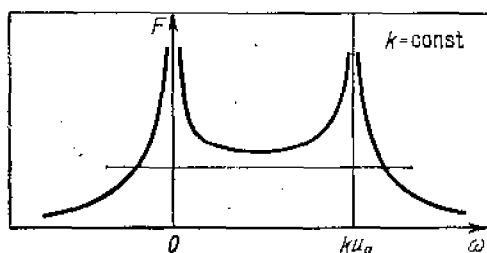


Рис. 1.18. График функции  $F(\omega, k)$  в дисперсионном уравнении (1.155)

$k$ , т. е. для возмущений с заданной длиной волны, приведен на рис. 1.18. Видно, что когда минимальное значение  $F$  оказывается меньше единицы, у уравнения (1.155) все четыре корня вещественны, что соответствует периодическому изменению возмущений со временем. Если же минимум  $F$  больше единицы, то уравнение (1.155) имеет только два

вещественных корня, а два корня являются комплексно сопряженными  $\omega = \omega' \pm i\gamma$ . Эти корни, очевидно, соответствуют изменению амплитуды колебаний по закону  $\exp\{\pm\gamma t - i\omega' t\}$ , и, таким образом, один из этих корней приводит к росту амплитуды со временем, т. е. к неустойчивости. Из (1.155) имеем, что  $\min F = (\omega_p^2 / k^2 u_0^2) (1 + (\omega_b^2 / \omega_p^2)^{2/3})^3$  и, следовательно, неустойчивыми окажутся достаточно длинноволновые возмущения, для которых

$$k < k_{\text{гп}} = (\omega_p / u_0) [1 + (\omega_b^2 / \omega_p^2)^{2/3}]^{3/2}. \quad (1.156)$$

Коротковолновые колебания с  $k > k_{\text{гп}}$  устойчивы. Примерный график функции  $\gamma(k)$  можно представить следующим образом. Неустойчивы только волны, сохраняющие фазовый резонанс с пучком  $\omega = k u_0$ . При малых  $k$  ( $k < \omega_p / u_0$ ) инкремент нарастает с волновым числом

$$\gamma = k u_0 (n_1 / n_0)^{1/2} (k^2 u_0^2 / \omega_p^2 - 1)^{-1/2}. \quad (1.157)$$

Максимальный инкремент имеет место при выполнении резонансного условия  $k u_0 = \omega_p$  (резонанс между собственными колебаниями электронов плазмы  $\omega = \omega_p$  и волной в пучке  $\omega = k u_0$ ). Инкремент нарастания этой наиболее неустойчивой гармоники

$$\gamma_{\text{max}} = \omega_p (3^{1/2} / 2^{4/3}) (n_1 / n_0)^{1/3}. \quad (1.158)$$

Из этой формулы, в частности, следует, что условие пренебрежения тепловым разбросом в пучке (моноэнергетический пучок) можно записать в виде

$$\Delta v / u_0 \ll (n_1 / n_0)^{1/3}. \quad (1.159)$$

В обратном предельном случае «размытого» пучка  $\Delta v / u_0 \gg (n_1 / n_0)^{1/3}$  для инкремента применима формула (1.148). Как и следовало

ожидать, инкремент неустойчивости в этом случае существенно меньше.

Выясним теперь механизм рассматриваемого явления. В основе пучковой неустойчивости лежит физический механизм поляризационных потерь заряженной частицы, т. е. потерь энергии на излучение продольных колебаний, но существует и значительное различие. Если использовать аналогию с квантовомеханической излучающей системой, то это различие можно сформулировать следующим образом: поляризационные потери отдельной заряженной частицы — эффект спонтанный, поляризационные потери, приводящие к пучковой неустойчивости, — процесс индуцированный. В равновесном состоянии пучок однороден по плотности, скомпенсирован по заряду и эффект поляризационных потерь отсутствует. Потери возникают в результате того, что волны плотности заряда, существующие в плазме на зародышевом тепловом уровне, приводят к предварительной модуляции пучка. В определенных условиях, которые будут выяснены ниже, электроны пучка собираются в основном в области тормозящих фаз поля волны и тем самым усиливают модулирующую их волну.

Чем больше амплитуда модулирующего поля, тем глубже модуляция пучка и больше потери и вследствие этого эффективнее происходит возбуждение волны пучком. В результате развивается пучковая неустойчивость — возбуждение плазменных колебаний с теплового уровня, сопровождающееся автомодуляцией пучка.

Неустойчивые плазменные волны должны находиться в фазовом резонансе с пучком — их фазовые скорости должны быть близки к скорости пучка. Однако условие фазового резонанса только необходимо для возникновения неустойчивости плазменных волн, достаточным ее условием является преимущественная бунчировка пучка в области тормозящих фаз поля, т. е. преобладание процессов индуцированного излучения волн над процессами поглощения.

Выясним условия, при которых происходит такая бунчировка. На рис. 1.19 изображены профиль потенциала плазменной волны  $\varphi(x)$  и сила, действующая на электроны пучка в волне  $ed\varphi/dx$ . Для определенности будем считать пучок моноэнергетическим, первоначально все его частицы имеют скорость  $u_0$ . Если предположить, что амплитуда волны изменяется со временем достаточно медленно, то возмущение скорости частиц пучка можно найти из закона

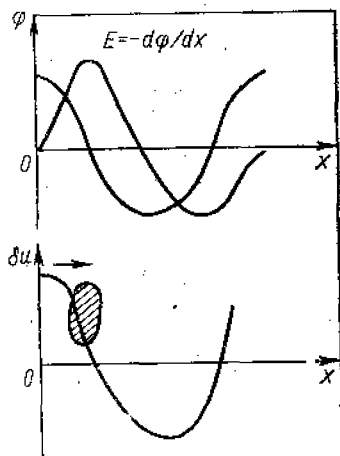


Рис. 1.19. Автомодуляции (бунчировка) электронного пучка при пучковой неустойчивости. Графики приведены в системе отсчета волны:  $x - (\omega/k)t \rightarrow x$

сохранения энергии

$$(m_e/2) (u - \omega/k)^2 - e\varphi = \text{const}, \quad (1.160)$$

т. е.  $\delta u = (e\varphi/m_e) / (u_0 - \omega/k)$ . С течением времени первоначально синусоидальный профиль волны скорости в пучке искажается, частицы с  $u > u_0$  забегают вперед, частицы с  $u < u_0$  отстают. При этом частицы пучка собираются в областях с повышенной крутизной профиля скорости  $u(x)$  (в системе отсчета волны движение направо). При выполнении условия  $u_0 > \omega/k$  (см. рис. 1.19) частицы собираются в области тормозящих фаз  $0 < \xi \equiv (kx/2\pi) < 1/2$ . Аналогичным образом если  $u_0 < \omega/k$ , то частицы будут бунчироваться в области фаз  $1/2 < \xi < 1$ , где они ускоряются электрическим полем волны, и неустойчивости не может быть.

Из приведенного анализа вытекает, что при взаимодействии электронного пучка с плазмой неустойчивыми оказываются только те волны, для которых выполнено условие

$$\omega \lesssim k u_0. \quad (1.161)$$

В этом случае электронный пучок разбивается на сгустки, стягивающиеся к тормозящим фазам электрического поля, и амплитуда волны растет со временем. Такой рост продолжается до тех пор, пока сгустки, на которые разобьется электронный пучок, не окажутся захваченными возбуждаемой им плазменной волной. Как

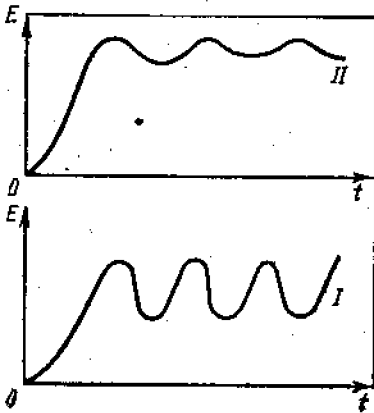


Рис. 1.20. Нелинейная эволюция амплитуды монохроматической волны, возбуждаемой при пучковой неустойчивости:

I — неустойчивость «моноэнергетического» пучка, в нелинейном режиме амплитуда волны испытывает глубокие осцилляции  $\Delta E/E_{\text{max}} \approx 2/3$ , соответствующие синхронным колебаниям частиц пучка в потенциальной яме; II — неустойчивость «размытого» пучка в плазме. В результате фазового размывания резонансных частиц амплитуда волны достаточно быстро выходит на стационарный уровень

следует из анализа, приведенного в § 1.13, захваченные частицы попеременно смещаются от тормозящей фазы поля к ускоряющей и наоборот и в среднем за период таких колебаний не обмениваются энергией с волной. В результате захват частиц пучка волной должен приводить к стабилизации пучковой неустойчивости. Поскольку ширина резонанса плазменная волна — пучок  $|v - \omega/k| \sim \gamma/k$ , то условие захвата частиц пучка имеет вид

$$e\varphi/m_e \sim \gamma^2/k^2. \quad (1.162)$$

Воспользуемся тем, что электрическое поле плазменной волны  $E \sim k\varphi$ , волновое число в области неустойчивости  $k \approx \omega_p/u_0$ , инкремент неустойчивости «моноэнергетического»

пучка определяется соотношением (1.158). В результате из (1.162) получим, что при неустойчивости «моноэнергетического» пучка энергия плазменной волны должна возрастать до значения

$$E^2/4\pi \sim n_1 m_e u^2 (n_1/n_0)^{1/3}. \quad (1.163)$$

Эта оценка, основанная на наглядных физических соображениях, подтверждается графиком зависимости амплитуды волны от времени, полученным при численном решении задачи с учетом нелинейных эффектов (рис. 1.20). Вначале происходит экспоненциальный рост амплитуды от теплового уровня, сопровождающийся бунчировкой пучка. В дальнейшем захват пучка волной приводит к стабилизации неустойчивости, осцилляции амплитуды поля в нелинейном режиме соответствуют фазовым колебаниям бунчей, за-

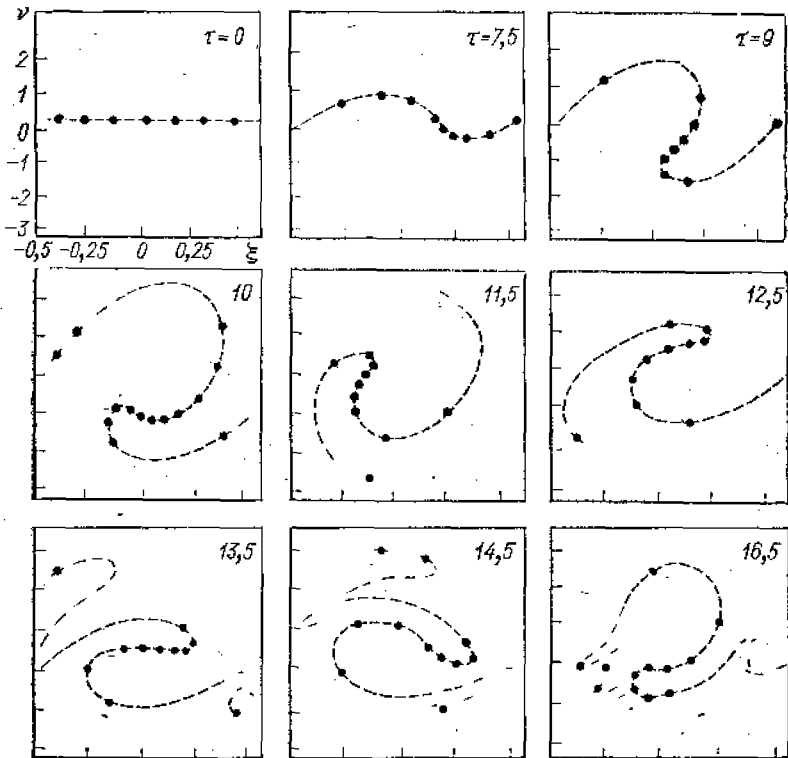


Рис. 1.21. Фазовая плоскость (зависимость скорости частиц пучка в системе отсчета волны  $v \sim u - \omega/k$  от их координаты  $\xi = kx/2\pi$ ) для моноэнергетического электронного пучка, взаимодействующего с плазмой в различные моменты времени  $\tau$  (по результатам численного эксперимента Н. Г. Мациборко и др. «Журн. эксперим. и теор. физ.», 1972, т. 63, с. 874).

На рисунке показаны бунчировка электронов пучка в поле волны и последующие фазовые осцилляции бунчей, которым соответствуют осцилляции амплитуды поля (см. рис. 1.20). Время измеряется в обратных инкрементах пучковой неустойчивости

хваченных в потенциальную яму волны, между тормозящими и ускоряющими фазами поля.

Примерно такой же вид имеет зависимость от времени амплитуды волны, возбуждаемой «размытым» электронным пучком (см. рис. 1.20). Основные отличия этого случая от случая моноэнергетического пучка: 1) из-за малого числа частиц, резонансных с вол-

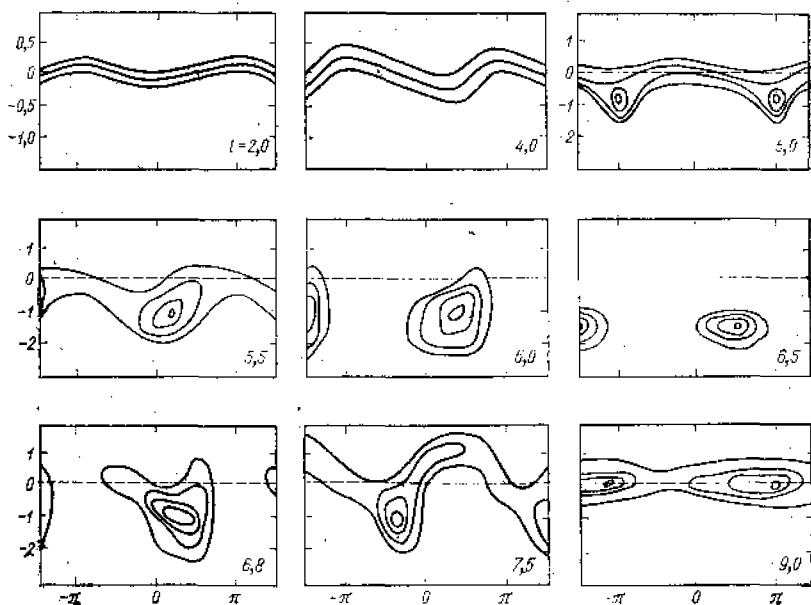


Рис. 1.22. Фазовая плоскость электронов пучка в эксперименте по взаимодействию моноэнергетического пучка малой плотности с плазмой (Gentile K. W., Lohr J. «Phys. Fluids», 1973, v. 16, p. 1465).

Фазовая плоскость показана на различных расстояниях  $l$  от места инъекции электронного пучка в плазму; расстояние измеряется в обратных пространственных инкрементах. При  $l < 4,0$  происходит лишь небольшая модуляция пучка: центральная линия соответствует максимуму функции распределения; верхняя и нижняя кривые служат указателями полуширины функции распределения. При больших  $l$  внутренний контур соответствует максимуму функции распределения, указаны также контуры, соответствующие  $l = (0,8, 0,5, 0,2)$  шаг. Пучок бунчируется по фазам и одновременно тормозится, пока при  $l = 6,5$  не достигается минимальная фазовая ширина сгустков. В дальнейшем сгустки начинают перемещаться к ускоряющим фазам поля, пучок ускоряется и при  $l = 9$  он снова имеет свою начальную скорость

ной, амплитуда волны оказывается существенно меньше; 2) наличие разброса по энергиям в пучке приводит к фазовому размещению в потенциальной яме, затуханию осцилляций и установлению волны постоянной амплитуды.

Процесс бунчировки пучка, «наблюденный» в численном эксперименте, показан на рис. 1.21. На рис. 1.22 приведены результаты лабораторного эксперимента по возбуждению монохроматической волны электронным пучком.

## § 1.15. Параметрическая неустойчивость

Авторы надеются, что читатель уже привык к мысли, что плазма — это не только большое число заряженных частиц, но и ансамбль большого числа осцилляторов — элементарных мод колебаний, каждое из которых характеризуется определенным значением волнового числа и частоты. В равновесной плазме все эти колебания находятся в зародышевом состоянии на уровне тепловых флуктуаций. При отклонении от равновесности (электрический ток в плазме, пучок быстрых частиц и др.) некоторые ветви колебаний (ионно-звуковая, плазменная) могут возбуждаться до весьма значительного уровня в результате какого-либо из описанных в предыдущих параграфах механизмов линейной неустойчивости. Пока амплитуда колебаний мала, все электромагнитные моды — осцилляторы можно считать гармоническими и независимыми друг от друга. Однако поскольку плазма — среда нелинейная, то при достаточно больших амплитудах возникает связь между модами — осцилляторами. Одна из форм этой связи, которая рассмотрена в настоящем параграфе, напоминает хорошо известное явление параметрического резонанса, описываемого в механике в простейшем случае уравнением Матье.

Ситуация такого рода получается, если в плазме возбуждено колебание с некоторой конечной амплитудой. Нелинейность плазмы приводит к тому, что малые волновые возмущения (пробные волны) на фоне заданного колебания (будем называть его «волной накачки») оказываются параметрически связанными, подобно тому как это имеет место в системе параметрически связанных осцилляторов. По аналогии с задачей о параметрическом осцилляторе Матье можно поставить вопрос об устойчивости такой системы, иначе говоря, о том, не может ли присутствие «волны накачки» приводить к нарастанию пробных волн. Первое, что сразу бросается в глаза, условие резонанса Матье  $n\omega_0 = 2\omega$ , должно быть дополнено ограничением на волновые числа  $nk_0 = 2k$ , так как в плазме каждый элементарный осциллятор характеризуется не только частотой, но и волновым числом. Одновременное выполнение этих условий явилось бы слишком жестким ограничением, поскольку кроме условий параметрического резонанса  $\omega$  и  $k$  для каждой ветви колебаний связаны друг с другом еще законом дисперсии  $\omega_0 = \omega_0(k_0)$ ,  $\omega = \omega(k)$ .

Более реальной оказывается возможность параметрического возбуждения одновременно по крайней мере пары волн. Развивающаяся при этом параметрическая, т. е. нелинейная, неустойчивость в плазме часто именуется «распадной». Она состоит в том, что в присутствии волны накачки с частотой  $\omega_0$  и волновым вектором  $k_0$  нарастает одновременно пара волн  $\omega_1, k_1$  и  $\omega_2, k_2$ , удовлетворяющих условиям

$$\left. \begin{aligned} \omega_0 &= \omega_1 + \omega_2; \\ k_0 &= k_1 + k_2. \end{aligned} \right\} \quad (1.164)$$

Соотношения (1.164) допускают весьма наглядную квантовую интерпретацию. При такой интерпретации набор элементарных мод — осцилляторов, присутствующих в плазме, можно рассматривать как некий газ «квазичастиц» с энергией  $\epsilon = \hbar\omega$  и импульсом  $\mathbf{p} = \hbar\mathbf{k}$  (фотоны для электромагнитных колебаний, фононы — для ионно-звуковых и т. д.). Тогда соотношение (1.164) есть не что иное, как законы сохранения энергии и импульса при распаде исходного «кванта»  $(\omega_0, \mathbf{k}_0)$  на два других —  $(\omega_1, \mathbf{k}_1)$ ,  $(\omega_2, \mathbf{k}_2)$ .

Первым теоретически предсказанным и детально исследованным еще в 1962 г. типом параметрической распадной неустойчивости явилась неустойчивость электронной ленгмюровской волны накачки.

Волнами с индексами 1 и 2 в условиях (1.164) в этом случае являются другая плазменная волна и ионно-звуковая волна, поэтому предполагается неизотермичность плазмы ( $T_e \gg T_i$ ). Эта неустойчивость часто называется распадом «плазмон  $\rightarrow$  плазмон + фонон», хотя задача совершенно не квантовая. В дальнейшем параметрическая неустойчивость исследовалась для самых различных ветвей колебаний и волн. Несмотря на разнообразие типов волн в плазме и вытекающий отсюда большой выбор параметрических связей, все параметрические неустойчивости имеют одинаковую природу. Поэтому удобно начать их рассмотрение с какой-нибудь простой модели. Очевидным обобщением уравнения Матве на случай волновой среды могло бы служить, например, следующее уравнение:

$$\partial^2 u / \partial t^2 - s^2 [1 + \alpha \cos(\omega_0 t - k_0 x)] \partial^2 u / \partial x^2 + \tilde{L}u = 0. \quad (1.165)$$

Подобно тому как в уравнении Матве модулируется собственная частота осциллятора, здесь модулируется скорость распространения волны. Слагаемое  $\tilde{L}u$ , где  $L$  — линейный оператор, добавлено, чтобы учесть возможное отклонение от линейного закона дисперсии  $\omega = ks$ , коэффициенты в этом члене в принципе также можно модулировать.

Будем искать условия параметрического возбуждения в уравнении (1.165) одновременно пары элементарных волн. Для этого приведем уравнение (1.165) к виду, напоминающему уравнение гармонического осциллятора с правой частью (вынуждающая сила). Удобно перейти к фурье-компонентам  $u_k = \int u \exp(ikx) dx$  и перенести слагаемое, учитывающее влияние волны накачки, в правую часть:

$$\begin{aligned} d^2 u_k / dt^2 + \omega^2(k) u_k = & -(1/2) s^2 (k_0 - k)^2 \alpha \exp(-i\omega_0 t) u_{k_0 - k}^* - \\ & -(1/2) s^2 (k_0 + k)^2 \alpha \exp(i\omega_0 t) u_{k_0 + k}, \end{aligned} \quad (1.166)$$

где  $\omega^2(k) = s^2 k^2 + L(k)$  — закон дисперсии волн (для простоты считаем, что модулируется только скорость распространения волн).

Вынуждающая сила будет в резонансе с собственной частотой осциллятора  $\omega_k$ , если выполнено условие

$$\omega_0 \pm \omega_{k_0-k} = \omega_k. \quad (1.167)$$

Выберем в этом условии знак минус, тогда приведенное соотношение совпадает, как нетрудно видеть, с распадным условием (1.164) для частоты. В этом случае в правой части уравнения (1.166) существенно только первое слагаемое. Волна  $u_{k_0-k}$ , в свою очередь, описывается аналогичным уравнением:

$$d^2 u_{k_0-k}^* / dt^2 + \omega_{k_0-k}^2 u_{k_0-k}^* = - (1/2) s^2 k^2 \exp(i\omega_0 t) u_k - (1/2) \alpha (2k_0 - k)^2 s^2 \exp(-i\omega_0 t) u_{2k_0-k}^*. \quad (1.168)$$

При выполнении резонансного условия на частоту  $\omega_0 - \omega_{k_0-k} = \omega_k$  в правой части уравнения (1.168) также существенно только первое слагаемое.

Итак, рассмотренное здесь параметрическое взаимодействие волн в нелинейной среде ничем не отличается от параметрического резонанса в системе двух связанных осцилляторов  $u_k, u_{k_0-k}$ . Однако эта аналогия стала полной лишь в силу использованного предположения — мы опустили слагаемое  $\sim u_{k_0+k}$  в правой части уравнения (1.166) и аналогичный член в уравнении (1.168). Дело в том, что для одновременного возбуждения осцилляторов  $u_{k_0-k}, u_{k_0+k}$  должны выполняться два распадных условия для частоты:

$$\omega_0 - \omega_{k_0-k} = \omega_k; \quad \omega_{k_0+k} - \omega_0 = \omega_k.$$

Их совместное выполнение практически маловероятно. Поэтому хотя в литературе и были попытки исследования этого случая, они не представляют существенного интереса в общем случае и здесь не рассматриваются.

Параметрическая связь между осцилляторами приводит к смещению частоты. Будем интересоваться случаем, когда поправка к частоте становится мнимой и, следовательно, соответствует неустойчивости. Решение системы уравнений (1.166), (1.168) ищем в виде

$$u_k = \tilde{u}_k \exp(-i\omega t); \quad u_{k_0-k}^* = \tilde{u}_{k_0-k}^* \exp\{-i(\omega - \omega_0)t\}.$$

Подстановка в (1.166) и (1.168) дает следующую систему уравнений

$$\left. \begin{aligned} (\omega^2 - \omega_k^2) \tilde{u}_k &= (\alpha s^2 / 2) (k_0 - k)^2 \tilde{u}_{k_0-k}^*; \\ [(\omega - \omega_0)^2 - \omega_{k_0-k}^2] \tilde{u}_{k_0-k}^* &= (\alpha s^2 / 2) k^2 \tilde{u}_k. \end{aligned} \right\} \quad (1.169)$$

При малой параметрической связи частота осцилляторов близка к линейной:  $\omega = \omega_k + i\gamma$ ,  $|\gamma/\omega_k| \ll 1$ . Тогда, используя распадное



условие  $\omega_k = \omega_0 - \omega_{k_0-k}$ , получим из условия разрешимости системы (1.169) следующее уравнение для  $\gamma$ :

$$\gamma^2 = \alpha^2 s^4 k^2 (k_0 - k)^2 / 16 \omega_k \omega_{k_0-k}. \quad (1.170)$$

Неустойчивость развивается при  $\gamma^2 > 0$ , т. е. при  $\omega_k \omega_{k_0-k} > 0$ , это вместе с распадным условием для частоты означает, что для возникновения параметрической неустойчивости необходимо, чтобы

$$\omega_0 > \omega_k; \omega_{k_0-k}. \quad (1.171)$$

Смысл полученного результата достаточно очевиден на «квантовом» языке: квант волны накачки  $(\omega_0, k_0)$  имеет большую частоту, а, следовательно, и большую энергию, чем квант любой из образующихся при распаде пробных волн, поскольку при распаде часть энергии уносится вторым квантом.

После обсуждения такой символической модели рассмотрим уже упоминавшийся выше распад плазменной волны на плазменную волну и звук.

Основной нелинейный эффект, приводящий к связи плазменных и звуковых колебаний, — это модуляция плотности плазмы низкочастотной звуковой волной. Рассмотрим, как с учетом этого эффекта меняются уравнения для плазменных и звуковых колебаний. Естественная физическая величина, характеризующая высокочастотные ленгмюровские колебания с большим разделением зарядов, — это электрическое поле колебаний  $E(t, x)$ . В линейной теории уравнение для электрического поля монохроматической ленгмюровской волны сводится к хорошо известному дисперсионному уравнению (1.146):

$$[\omega^2 - \omega_p^2 - 3k^2 T_e / m] E(\omega, k) = 0. \quad (1.172)$$

В присутствии звуковой волны происходит модуляция плотности плазмы, в результате чего в слагаемом  $\omega_p^2 E$  появляется нелинейный член, пропорциональный  $\delta n E$ . С учетом этого слагаемого плазменная волна уже не является более монохроматической, в ней рождаются новые гармоники на биениях ленгмюровской и звуковой волн. Нетрудно обобщить уравнение (1.172) на случай немонохроматичности ленгмюровской волны. Очевидно, что при этом следует заменить частоту  $\omega$  на оператор дифференцирования по времени  $\omega \rightarrow i\partial/\partial t$  и аналогичным образом волновое число  $k$  — на оператор дифференцирования по координате  $k \rightarrow (1/i)(\partial/\partial x)$ . В итоге вместо (1.172) получаем следующее дифференциальное уравнение для электрического поля ленгмюровской волны:

$$(\partial^2/\partial t^2 - 3r^2 \omega_p^2 (\partial^2/\partial x^2) - \omega_p^2) E = \omega_p^2 E \delta n / n_0, \quad (1.173)$$

где  $\omega_p^2$  — квадрат ленгмюровской частоты, рассчитанной по невозмущенной плотности  $n_0$  (нелинейный член, возникающий в результате модуляции плотности плазмы звуковой волной, перенесен в правую часть уравнения).

Для низкочастотных квазинейтральных колебаний, напротив, электрическое поле весьма мало и звуковые колебания наиболее естественно описываются такими величинами, как скорость ионов в волне либо возмущение плотности. Уравнение для возмущения плотности в монохроматической звуковой волне опять-таки может быть получено простым обобщением линейного дисперсионного уравнения. Считая волну достаточно медленной  $\omega/k \ll v_{Te}$  и квазинейтральной, с учетом результатов § 1.11 запишем следующее уравнение для  $\delta n$ :

$$[(1/k^2 r_D^2) + \varepsilon_i(\omega, k)] \delta n(\omega, k) = 0. \quad (1.174)$$

Это уравнение, в принципе, учитывает и кинетические эффекты, связанные с ионами, что может быть существенно при выполнении условия  $\omega/k \sim v_{Ti}$ . Если же частота и волновое число низкочастотной моды таковы, что выполнено условие  $\omega/k \gg v_{Ti}$ , то ионы можно описывать гидродинамически. В этом случае, как мы знаем,  $\varepsilon_i = -\omega_{pi}^2/\omega^2$  и уравнение (1.174) переходит в следующее:

$$[\omega^2 - k^2(T_e/m_i)] \delta n(\omega, k) = 0. \quad (1.175)$$

Связь ионно-звуковых колебаний с высокочастотными ленгмюровскими осуществляется из-за существования сил высокочастотного давления (см. § 1.7). В этом параграфе было показано, что при наличии высокочастотных колебаний кроме обычного газокINETического давления электронов возникает еще и высокочастотное

$$p_{в.ч} = (1/16\pi) \langle E^2 \rangle,$$

где угловые скобки, как обычно, означают усреднение по высокой частоте. Звуковая волна приводит, с одной стороны, к модуляции плотности плазмы, а следовательно, и кинетического давления  $\sim \delta n T_e$ , а с другой стороны, из-за возникновения биений ленгмюровских волн — к модуляции высокочастотного давления  $\sim \langle E^2 \rangle / 16\pi$ . Поэтому в уравнении (1.175) для  $\delta n$  следует сделать замену:

$$\delta n T_e \rightarrow \delta n T_e + \langle E^2 \rangle / 16\pi.$$

Кроме того, так же как и в уравнении для высокочастотной ленгмюровской волны, подставим в (1.175) вместо  $\omega$  и  $k$  операторы дифференцирования  $i\partial/\partial t$  и  $(1/i)\partial/\partial x$ . В результате получим следующее уравнение для модуляции плотности плазмы медленных квазинейтральных движений:

$$(\partial^2/\partial t^2 - (T_e/m_i)\partial^2/\partial x^2)\delta n = (1/16\pi m_i)\partial^2/\partial x^2 \langle E_e^2 \rangle. \quad (1.176)$$

Будем искать решение уравнений (1.173 и (1.176) в виде колебаний, удовлетворяющих распадным условиям (1.164):

$$\left. \begin{aligned} \delta n &= (1/2) \delta \tilde{n} \exp\{i(kx - \omega t)\} + \text{к. с.}; \\ E &= E_0 \exp\{i(k_0 x - \omega t)\} + E_1 \exp\{i(k_0 - k)x - \\ &\quad - i(\omega_0 - \omega)t\} + \text{к. с.} \end{aligned} \right\} \quad (1.177)$$

Тогда для амплитуд плазмона и фона, возбуждаемых при параметрической неустойчивости, имеем следующую систему уравнений:

$$\left. \begin{aligned} (\omega^2 - \omega_s^2(k))\delta n &= (k^2 e^2 n_0 / 2m_i m_e \omega_p^2) E_s E_1^* ; \\ [(\omega_0 - \omega)^2 - \omega_{l, k_0 - k_1}^2] E_1^* &= (\omega_p^2 / 2n_0) \delta n E_0^* . \end{aligned} \right\} \quad (1.178)$$

где  $\omega^l(k) = (\omega_p^2 + 3k^2 T_e / m_e)^{1/2}$  — частота плазмона с волновым числом  $k$ ;  $\omega^s(k) = k(T_e / m_i)^{1/2}$  — частота звука. По структуре эта система уравнений эквивалентна уравнениям (1.169), и по аналогии с (1.169) имеем в рассматриваемом случае следующую формулу для инкремента параметрической неустойчивости:

$$\gamma^2_d = (1/16) \omega_{k_0} E_0^2 / 4\pi n_0 T. \quad (1.179)$$

Как уже отмечалось выше, возбуждаемый при параметрической неустойчивости плазмон должен иметь частоту меньшую, чем у вол-

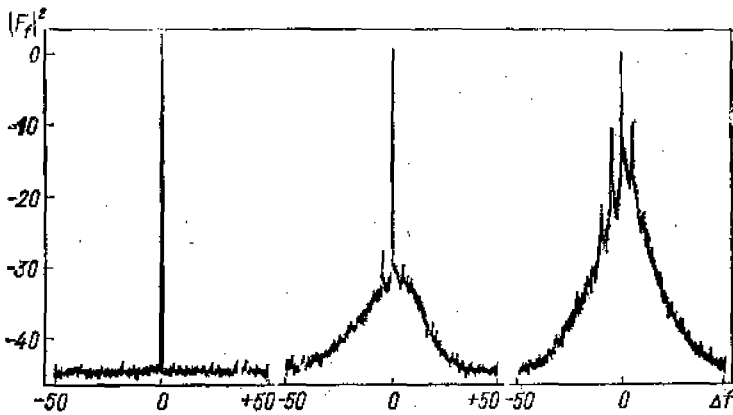


Рис. 1.23. Экспериментальное наблюдение распадной параметрической неустойчивости монохроматической плазменной волны (Franklin R. N., Hamberger S. M., Smith G. J. («Plasma Phys.», 1973, v. 15, p. 935).

Монохроматическая волна с частотой, близкой к плазменной, и малым резонансным затуханием возбуждалась с помощью зонда. Показаны спектры нарастающих плазменных колебаний на различных расстояниях от возбуждающего зонда

ны накачки. С учетом закона дисперсии плазменных колебаний это означает, что при параметрической неустойчивости перекачка энергии колебаний происходит в сторону больших длин волн. Используя распадное условие, которое в рассматриваемом случае можно записать в виде

$$(3/2) k_0^2 r_D^2 - (3/2) k_1^2 r_D^2 = k r_D (m_e / m_i)^{1/2}, \quad (1.180)$$

где  $k_1 = k_0 - k$  — волновое число пробного плазмона, получаем, что параметрическая неустойчивость распадается на звук возможна только для не слишком длинноволновых плазмонов:  $k_0 r_D > (1/3) \times (m_e / m_i)^{1/2}$ . Если  $k_0 r_D \gg (m_e / m_i)^{1/2}$ , то, как следует из соотноше-

ния (1.180), параметрически связанными окажутся **только** распространяющиеся навстречу друг другу плазменные волны,  $k_1 \approx -k_0$ , при этом в результате отдельного акта распада длинноволновая перекачка плазмона происходит на некоторое малое  $\Delta k = k_0 + k_1 \approx r_D^{-1} (m_e/m_i)^{1/2} \ll k_0$ .

На рис. 1.23 и 1.24 приведены результаты лабораторного и численного экспериментов, иллюстрирующих параметрический распад плазменной волны.

Параметрически связанными между собой могут быть самые различные ветви колебаний плазмы — электромагнитные  $t$ -волны,

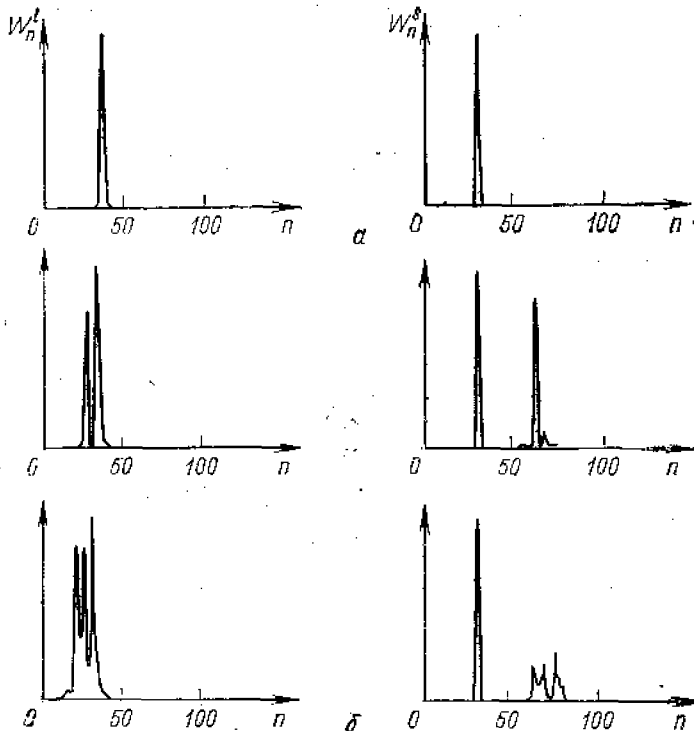


Рис. 1.24. Возникновение спектра ленгмюровских волн, возбуждаемых вследствие распада электромагнитной волны накачки с частотой  $\omega_0$ , близкой к плазменной (численный эксперимент):

$a$  — возбуждение монохроматической ленгмюровской волны из электромагнитной волны накачки,  $k_i = \frac{1}{r_D} \sqrt{\frac{2}{3} (\omega_0 - \omega_p) \omega_p^{-1}}$ . При этом в спектре ионно-звуковых колебаний также

появляется волна с волновым числом  $k_i$ ;  $b$  — возбуждение сателлитов в спектре ленгмюровских волн в результате распадной неустойчивости по схеме  $l \rightarrow l+s$ . В результате распада ленгмюровской волны возбуждаются ионно-звуковые колебания с волновым числом порядка  $2k_i$  (Горбушина Т. А., Дегтярев Л. М. и др. Препринт Ин-та прикл. мат. АН СССР, 1978, № 17)

плазменные  $l$ -волны, ионно-звуковые  $s$ -волны. Но неперенное условие параметрической неустойчивости — частота волны накачки должна быть больше частоты всех возбуждаемых в результате неустойчивости волн. Не вдаваясь в детали соответствующих вычислений, которые легко провести в рамках намеченной выше общей схемы, приведем условия возникновения всех возможных типов параметрических неустойчивостей изотропной плазмы и инкременты нарастания амплитуды (табл. 1.1).

Таблица 1.1

Условия распада параметрических неустойчивостей волн в плазме

Волны, участвующие в распаде	Условие распада	Инкремент нарастания
$l \rightarrow l' + s$	$k_0 > r_D^{-1} (1/3) (m_e/m_i)^{1/2}$	$(eE_0/m_e \omega^2 v_{Te}) (\omega^l \omega^s)^{1/2}$
$t \rightarrow l + s$	$k_0 > (\omega_p/c) (m_e/m_i)^{1/2}$	$(eE_0/m_e \omega^2 v_{Te}) (\omega^l \omega^s)^{1/2}$
$t \rightarrow l + l'$	$\omega^l \approx 2\omega_p$	$(eE_0/\omega^l m_e c) \omega_p$
$t \rightarrow l' + l$	$\omega_p \geq \omega^l (v_{Te}/c)$	$(eE_0/m_e \omega^l c) (\omega^l \omega_p)^{1/2}$
$t \rightarrow l' + s$	$\omega_p \geq \omega^l (v_{Te}/c)$	$\{(eE_0)/(m_e \omega^l v_{Te})\} (\omega^l \omega^s)^{1/2} (\omega_p/\omega)$

Некоторые из приведенных в таблице параметрических неустойчивостей соответствуют явлениям вынужденного комбинационного рассеяния, известным из других разделов физики. Так, например, распад по схеме  $t \rightarrow l' + s$  соответствует хорошо известному в физике твердого тела явлению Манделштама — Бриллюэна — рассеянию света интенсивными звуковыми колебаниями решетки. Распад по схеме  $t \rightarrow l' + l$  — это явление рассеяния Рамана — рассеяние света на оптических колебаниях решетки.

Порог параметрической неустойчивости в однородной плазме определяется диссипацией энергии пробных волн. Затухание одного из двух раскачиваемых возмущений не может полностью стабилизировать неустойчивость, а только уменьшает ее инкремент. Действительно, обратимся вновь к задаче о распаде плазменной волны и учтем сначала затухание низкочастотной моды колебаний. При этом соответствующий ей осциллятор становится затухающим с декрементом затухания  $\nu_s$ , соответственно этому левую часть первого из уравнений (1.178) следует видоизменить, введя в нее слагаемое  $2i\nu_s \omega l$ . Дисперсионное уравнение получается по общей схеме. Решая его в предположении, что  $\gamma = \text{Im} \omega \ll \nu_s$ , получаем, что в этом случае развивается диссипативная параметрическая неустойчивость с инкрементом

$$\gamma = \gamma^2 d / \nu_s. \quad (1.181)$$

И только при учете затухания плазменной волны (его легко учесть введением в левую часть второго из уравнений (1.178) слагаемого  $2i\nu_e(\omega_0 - \omega)$ , где  $\nu_e$  — затухание плазмона), когда уравнение (1.181) трансформируется в следующее:

$$\gamma = \gamma_d^2 / \nu_s - \nu_e,$$

возможна стабилизация параметрической неустойчивости. Пороговое значение амплитуды накачки, при которой происходит такая стабилизация, определяется из условия

$$\gamma_d^2 = \nu_e \nu_s.$$

Предшествующее рассмотрение относилось к начальной стадии параметрической неустойчивости, когда амплитуду волны накачки можно считать постоянной,

а амплитуды пробных волн нарастают со временем по экспоненте. При достаточно больших амплитудах пробных волн становятся существенными нелинейные эффекты, связанные с изменением амплитуды волны накачки. Обратимся для конкретности к задаче о параметрической неустойчивости плазменной волны. Уравнение для изменения  $E_0$  легко можно получить из (1.173), причем очевидно, что  $\partial E_0 / \partial t \sim \delta n E_1$ . Распад при больших амплитудах пробных волн описывается, таким образом, системой из трех связанных нелинейных уравнений для  $E_0$ ,  $E_1$ ,  $\delta n$ . Эта система уравнений допускает точное аналитическое решение. Оно, однако, слишком громоздко для этой книги. Опуская вывод, приведем графики зависимостей  $E_0(t)$  и  $E_1(t)$ , полученные при точном интегрировании уравнений взаимодействия трех волн (рис. 1.25). Как видно, амплитуда пробной волны  $E_1$  достигает максимального значения, равного начальному значению амплитуды накачки  $E_0(0)$  (накачка при этом минимальна), в дальнейшем энергия перекачивается от пробной волны к волне накачки и т. д. Характерный период осцилляций порядка величины обратного инкремента неустойчивости. Энергия, переходящая в ионно-звуковые колебания, мала по сравнению с энергией плазменной волны в  $\omega^2 / \omega_p$  раз — именно такая доля энергии уносится фоном при элементарном акте распада — «плазмон → плазмон + фон».

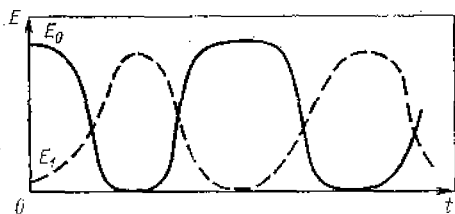


Рис. 1.25. Зависимость от времени амплитуд при взаимодействии трех волн при распадной неустойчивости

### § 1.16. Резонансное взаимодействие волн и частиц (квазилинейная теория)

Плазму, в которой в конце концов возбуждается большое количество волн — мод колебаний (например, из-за неустойчивостей, рассмотренных ранее), можно назвать турбулентной, если

амплитуды волн существенно превышают уровень тепловых флуктуаций, а их фазы случайны. Вообще говоря, если уровень колебаний становится очень большим, то могут стираться описанные выше характерные черты отдельных мод. Поэтому специально выделяют более простой случай не очень больших амплитуд — так называемое приближение слабой турбулентности. Нелинейность плазмы приводит к взаимодействию между модами типа рассмотренной в предыдущем параграфе распадающей неустойчивости, так что коэффициенты в разложении по собственным колебаниям становятся медленно меняющимися (в масштабе периода колебаний) функциями времени.

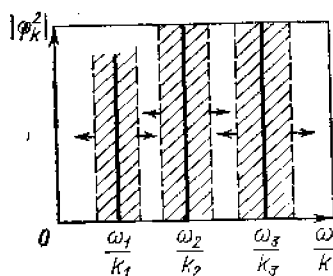


Рис. 1.26. Перекрывание зон резонансов Ландау для волн с близкими фазовыми скоростями и «коллективизация» резонансных частиц

Важная особенность плазменной турбулентности, отличающая ее от турбулентности жидкости, связана с тем, что в плазме значительную, а иногда и доминирующую роль играет известный из предыдущих параграфов эффект резонансного взаимодействия волн с частицами. В старшем порядке по амплитуде поля такой эффект соответствует индуцированному излучению и поглощению волн частицами, скорости которых связаны с частотами и волновыми векторами волн черенковским условием (резонанс Ландау):

$$\omega = kv. \quad (1.182)$$

Здесь уместно поставить вопрос о том, как будет меняться функция распределения резонансных частиц по скоростям при излучении и поглощении волн. Этот вопрос уже рассматривался в § 1.13 для изолированной монохроматической волны. В этом случае основной эффект обратного воздействия волны на частицы заключается в захвате резонансных частиц волной и их фазовых осцилляциях в потенциальной яме. Зависимость периода фазовых колебаний от энергии частиц приводила к фазовому размешиванию, так что функция распределения в узком интервале скоростей  $|v - \omega/k| \sim (e\varphi_0/m)^{1/2}$  испытывала мелкомасштабные осцилляции, сглаженная по этим осцилляциям функция распределения была постоянна вдоль траекторий.

Траектории резонансных частиц существенно отличались от невозмущенных, и решение задачи удалось получить только благодаря тому, что уравнения движения частиц при достаточно медленном изменении амплитуды волны имеют точные интегралы. Уже при наличии двух-трех волн строгий анализ движения резонансных частиц становится безнадежно сложным, и аналитическое решение задачи для этого случая до сих пор не получено. Ситуация, однако, существенно упрощается в предельном случае очень

большого числа волн, когда можно использовать статистический подход, считая случайными их фазы.

Действительно, предположим, что в плазме возбужден широкий пакет волн, фазовые скорости которых достаточно плотно заполняют некоторый интервал  $(\omega/k)_{\max} > v > (\omega/k)_{\min}$ , так что области захвата соседних волн перекрываются. Очевидно, что для этого должно быть выполнено условие

$$\delta(\omega/k) < \{(e/mk)(E^2_k \delta_k)^{1/2}\}^{1/2}, \quad (1.183)$$

где  $\delta(\omega/k)$ ,  $\delta_k$  — расстояние между соседними гармониками по фазовой скорости и волновому числу соответственно;  $E^2_k$  — спектральная плотность энергии электрического поля плазменных шумов. Тогда энергия плазменных шумов на интервале  $\delta_k$  равна  $E^2_k \delta_k$ , среднеквадратичный потенциал на этом интервале  $(E^2_k \delta_k)^{1/2}/k$  и условие (1.183) действительно соответствует перекрытию потенциальных ям для соседних волн (рис. 1.26). При выполнении этого условия происходит своеобразная «коллективизация» резонансных частиц между двумя любыми соседними волнами. Если фазы волн случайны, то в результате толчков со стороны многих волн скорость частицы как бы участвует в броуновском движении. В фазовом пространстве это броуновское движение складывается со свободным движением частиц, так что результирующие траектории имеют вид, изображенный на рис. 1.27. С течением времени броуновские траектории частиц хаотически, но достаточно плотно заполняют на фазовой плоскости весь участок резонансных скоростей частиц:  $(\omega/k)_{\max} > v > (\omega/k)_{\min}$ . Относительно полной ширины пакета волн в этом случае предполагается, что она существенно больше ширины потенциальной ямы, созданной пакетом:

$$\Delta(\omega/k) = (\omega/k)_{\max} - (\omega/k)_{\min} \gg (e\varphi_0/m)^{1/2}, \quad (1.184)$$

где  $\varphi_0 = [\int dk E^2_k / k^2]^{1/2}$  — среднеквадратичный потенциал в пакете волн. Устанавливающаяся в этих условиях функция распределения, разумеется, содержит мелкомасштабные шероховатости и сохраняет (в отсутствие столкновений) энтропию, но физический смысл имеет только сглаженная функция распределения, которая соответствует росту энтропии и описывает диффузию резонансных частиц в поле волны. В результате диффузии функция распределения будет выравниваться, т. е. стремиться к постоянному значению, на участке  $(\omega/k)_{\max} > v > (\omega/k)_{\min}$ , заполненным траекториями частиц (постоянно сглаженной функцией распределения

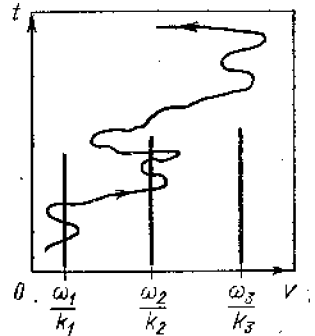


Рис. 1.27. Броуновское движение резонансных частиц в пространстве скоростей



на траекториях имело место и в случае монохроматической волны).

Процесс диффузии резонансных частиц можно описать в рамках так называемого квазилинейного приближения. При получении уравнений этого приближения предполагается, что амплитуды возбужденных в плазме волн не слишком велики, так что нелинейными взаимодействиями между колебаниями можно пренебречь, а единственный нелинейный эффект, который принимается во внимание, связан с обратным воздействием колебаний на распределение резонансных частиц по скоростям, в результате чего возбуждение и поглощение колебаний происходят на медленно меняющемся под действием самих же колебаний «фоне».

Мы не будем вдаваться в детали обоснования уравнений квазилинейного приближения (хотя такое обоснование уже давно проведено), а ограничимся наиболее простым выводом этих уравнений для случая взаимодействия с плазмой ленгмюровских колебаний. Будем считать плазму однородной, а колебания одномерными.

В соответствии со сделанным выше замечанием функцию распределения резонансных частиц по скоростям представим в виде

$$f = f_0(t, v) + \delta f(t, v, x). \quad (1.185)$$

Здесь  $f_0(t, v)$  — медленно меняющаяся функция распределения, характеризующая фон, на котором развиваются колебания;  $\delta f(t, v, x)$  — осциллирующая в пространстве и во времени добавка к функции распределения, характеризующая эти колебания. Очевидно, что

$$\langle \delta f \rangle = 0, \text{ т. е. } \langle f \rangle = f_0. \quad (1.186)$$

Скобки здесь означают усреднение по временному интервалу, большому по сравнению с периодом колебаний, и по пространственному интервалу, большому по сравнению с длиной волны.

Тогда уравнение для  $f_0$  получается простым усреднением исходного кинетического уравнения и имеет вид

$$\partial f_0 / \partial t = (e/m) \langle E \partial \delta f / \partial v \rangle. \quad (1.187)$$

Здесь кроме соотношений (1.185) и (1.186) учтено отсутствие среднего электрического поля в плазме  $\langle E \rangle = 0$ . Слагаемое, перенесенное в правую часть уравнения (1.187), определяет изменение  $f_0$  из-за наличия среднеквадратичного эффекта быстрых осцилляций (так называемый квазилинейный интеграл столкновений). При получении его явного вида учтем, что в плазме возбужден достаточно широкий пакет волн, т. е.

$$E = \sum_k E_k(t) \exp \{i(kx - \omega_k t)\};$$

$$\delta f = \sum_k \delta f_k(t, v) \exp \{i(kx - \omega_k t)\}. \quad (1.188)$$

В этих формулах  $\omega_k$  — частоты линейных плазменных мод, определяемые соотношением (1.36);  $E_k(t)$  — амплитуды этих мод, мед-

ленно меняющиеся со временем в результате взаимодействия с резонансными частицами. Поскольку величины  $\delta f$  и  $E$  по физическому смыслу должны быть вещественны, то очевидно, что в разложениях (1.188)  $E_k$ - и  $E_{-k}$ -гармоники комплексно сопряжены, т. е. выполняются условия:

$$E_{-k} = E_k^*; f_{-k} = f_k^*; \omega_{-k} = -\omega_k. \quad (1.189)$$

Используя эти условия, уравнение (1.187) перепишем в виде

$$\partial f_0 / \partial t = (e/m) \sum E_k \partial f_k / \partial v \quad (1.190)$$

(гармоники с  $k' \neq -k$  из этой суммы исчезают при усреднении).

Выше отмечалось, что эффектом нелинейного взаимодействия гармоник в квазилинейном приближении пренебрегается. Соответственно этому для связи  $f_k$  и  $E_k = -ik\phi_k$  используем формулу линейной теории (1.123). Единственное отличие от линейной теории состоит в том, что в этой формуле под  $f_0$  понимается меняющаяся со временем фоновая функция распределения; формула (1.123) применима, если «фон» изменяется со временем достаточно медленно в масштабе периода колебаний  $|(1/f_0) \partial f_0 / \partial t| \ll \omega_k$ .

Учитывая также, что в согласии с замечаниями, сделанными в § 1.12, резонансный знаменатель  $kv - \omega_k$  в этой формуле следует понимать в смысле (1.136), получаем окончательно следующую формулу для  $f_k$ :

$$f_k = (e/m) E_k (\partial f_0 / \partial v) (\mathcal{P} / (kv - \omega_k) + i\pi \delta(kv - \omega_k)). \quad (1.191)$$

Подставляя  $f_k$  в (1.190) и учитывая, что  $\mathcal{P}(1/x)$  — нечетная, а  $\delta(x)$  — четная функция аргумента, получаем следующее уравнение для  $f_0$ :

$$\partial f_0 / \partial t = (\pi e^2 / m) (\partial / \partial v) \left[ \sum_k |E_k|^2 \delta(kv - \omega) \partial f_0 / \partial v \right]. \quad (1.192)$$

В правой части уравнения (1.192) можно перейти от суммирования к интегрированию по волновым числам с помощью соотношения

$$\sum_k = (1/2\pi) \int dk = (1/\pi) \int_{k>0} dk.$$

В этой формуле учтено, что элементарный «интервал»  $k$ , приходящийся на одно колебание,  $\delta k = L/2\pi$  ( $L$  — линейный размер плазмы, всюду для простоты полагается  $L=1$ ). Формулы для случая  $L \neq 1$  получаются с помощью очевидной замены  $|E_k|^2 \rightarrow L|E_k|^2$ . Выполняя в (1.192) интегрирование по  $k$  с помощью  $\delta$ -функции, можно записать это уравнение в виде квазилинейного уравнения диффузии по скорости

$$\partial f_0 / \partial t = (\partial / \partial v) (D \partial f_0 / \partial v), \quad (1.193)$$

где коэффициент диффузии определяется спектральной плотностью плазменных шумов  $|E_k|^2$  в резонансной точке спектра  $kv = \omega_k$ :

$$D = (e^2/m^2) |E_k|^2 (kv = \omega_k) / |v - d\omega/dk|. \quad (1.194)$$

Разумеется, это уравнение диффузии следует дополнить уравнением для амплитуд волн, т. е. фактически для изменения со временем коэффициента диффузии. В квазилинейном приближении инкремент отдельной гармоники спектра совпадает с линейным (1.148), однако опять-таки под  $f_0$  в этой формуле следует понимать медленно меняющийся со временем «фон». В результате имеем

$$\left. \begin{aligned} (\partial/\partial t) |E_k|^2 &= 2\gamma_k |E_k|^2; \\ \gamma_k &= (\pi/2n_0) (\omega_k v^2) (df_0/dv) (v = \omega_k/k). \end{aligned} \right\} \quad (1.195)$$

Уравнения (1.193) — (1.195) и есть замкнутая система уравнений квазилинейного приближения. С помощью этих уравнений ниже рассмотрены две простые задачи — о релаксации электронного пучка в плазме и о поглощении пакета плазменных колебаний.

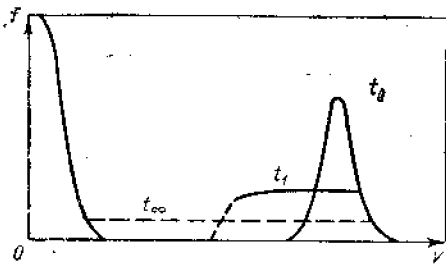


Рис. 1.28. Эволюция функции распределения электронного пучка в плазме при пучковой неустойчивости

Начнем с задачи о релаксации электронного пучка. Начальная функция распределения по скоростям для такой задачи имеет вид, показанный на рис. 1.28. Максимум функции распределения при  $v=0$

соответствует тепловым частицам плазмы, имеющим, например, максвелловское распределение, второй максимум соответствует пучку быстрых (надтепловых) частиц. Если разброс по скоростям в пучке достаточно велик  $\Delta v \gg (n_1/n_0)^{1/3} v$ , то инкремент неустойчивости плазменных волн определяется из уравнения (1.148), релаксацию такого пучка можно рассматривать в рамках квазилинейных уравнений.

Если же электронный пучок первоначально моноэнергетический [ $\Delta v \ll (n_1/n_0)^{1/3} v$ ], то на начальной стадии его релаксации происходит возбуждение монохроматической волны. Нелинейная теория возбуждения монохроматической волны рассматривалась в § 1.13 — волна нарастает до значения  $e\varphi_0/m \sim \gamma^2/k^2 \sim v_0^2 (n_1/n_0)^{2/3}$  и стабилизируется. При более детальном рассмотрении, однако, оказывается, что монохроматическая волна сама по себе неустойчива. Рано или поздно она размывается в пакет волн. Здесь этот процесс не рассмотрен. Важно лишь, что в конце концов дальнейшую релаксацию пакета снова можно рассматривать в квазилинейном приближении.

Если же электронный пучок первоначально моноэнергетический [ $\Delta v \ll (n_1/n_0)^{1/3} v$ ], то на начальной стадии его релаксации происходит возбуждение монохроматической волны. Нелинейная теория возбуждения монохроматической волны рассматривалась в § 1.13 — волна нарастает до значения  $e\varphi_0/m \sim \gamma^2/k^2 \sim v_0^2 (n_1/n_0)^{2/3}$  и стабилизируется. При более детальном рассмотрении, однако, оказывается, что монохроматическая волна сама по себе неустойчива. Рано или поздно она размывается в пакет волн. Здесь этот процесс не рассмотрен. Важно лишь, что в конце концов дальнейшую релаксацию пакета снова можно рассматривать в квазилинейном приближении.

Таким образом, будем считать разброс по скоростям в пучке достаточно большим, так что применимы квазилинейные уравнения. Тогда волны с фазовыми скоростями в некотором интервале, где  $df_0/dv > 0$ , оказываются неустойчивыми. Возбуждение волн сопровождается диффузией частиц пучка по скоростям, и в первоначальной области неустойчивости устанавливается «плато» на функции распределения (см. рис. 1.28). Однако такая функция распределения неустойчива, на ее переднем фронте производная  $\partial f_0/\partial v$  положительна и происходит возбуждение волн. Область неустойчивости и соответственно область диффузии в пучке все время смещается к меньшим скоростям. В результате на функции распределения возникает как бы волна релаксации, имеющая вид ступеньки с крутым фронтом и распространяющаяся в область малых скоростей. Перед фронтом шумы остаются на тепловом уровне, за фронтом возбуждены интенсивные плазменные шумы, и функция распределения близка к «плато». Процесс релаксации заканчивается, лишь когда частицы пучка продиффундируют до скоростей, сравнимых с тепловой скоростью плазмы. Окончательные границы «плато» определяются из следующих соотношений:

$$f_0^\infty = f_m(v_{\min}), \quad f_0^\infty = f_0^*(v_{\max}). \quad (1.196)$$

Здесь  $f_0^\infty$  — окончательная функция распределения в резонансной области, имеющая вид «плато»  $\partial f_0^\infty/\partial v = 0$ ;  $f_m(v)$  — максвелловская функция распределения тепловых частиц плазмы;  $f_0^*(v)$  — начальная функция распределения в пучке. Очевидно, что

$$v_{\min} \approx v_T, \quad v_{\max} \approx u_0. \quad (1.196a)$$

Высоту «плато» можно найти, воспользовавшись законом сохранения числа частиц в резонансной области:

$$f_0^\infty(v_{\max} - v_{\min}) = \int f_0^* dv \approx n_1, \quad (1.196b)$$

откуда имеем приближенно

$$f_0^\infty \approx n_1/u_0.$$

Спектральную плотность энергии плазменных шумов в резонансной области  $v_{\min} < \omega/k < v_{\max}$  найдем с помощью так называемого интеграла энергии квазилинейных уравнений. Для его получения подставим в правую часть квазилинейного уравнения диффузии  $|E_k|^2 (\partial f/\partial v)$  ( $kv = \omega$ ) из уравнения (1.195) для  $|E_k(t)|^2$ . В результате приходим к следующему соотношению:

$$\pi\omega_p \partial f_0/\partial t = (e^2 n_0/m^2 e) (\partial/\partial v) [(1/v^3) (\partial E_k^2/\partial t)].$$

Проинтегрируем это уравнение по времени и пренебрежем вкладом тепловых шумов  $E_k^2(t=0)$ . Интегрируя получившееся соотношение по скорости в пределах от  $v_{\min}$  до  $v$  с очевидным гра-

ничным условием — спектральная плотность шумов на границе резонансной области обращается в нуль  $|E_k|^2(v=v_{\min})=0$ , получаем искомый интеграл энергии — формулу, связывающую спектральную плотность плазменных шумов и изменение функции распределения резонансных частиц:

$$|E_k|^2(v) = \pi (m_e^2/n_0 e^2) \omega_p v^3 \int_{v_{\min}}^v (f_0(t, v) - f_0^0(v)) dv. \quad (1.197)$$

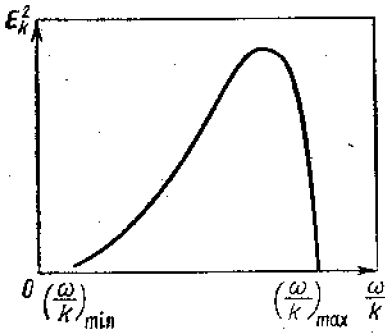


Рис. 1.29. Спектр плазменных колебаний, возбуждаемых при квазилинейной релаксации электронного пучка в плазме

Как следует из формулы (1.197), спектральная плотность плазменных шумов вначале растет с ростом фазовой скорости, достигает максимума при  $v \approx u_0$  и при больших скоростях быстро убывает, обращаясь в нуль при  $v=v_{\max}$  (рис. 1.29). В той области скоростей, где первоначально не было пучка  $v < u_0$  и  $f_0^0(v)=0$  (это и есть основная энергосодержащая область для спектра волн), из уравнения (1.197) имеем следующее соотношение для асимптотической формы спектра плазменных шумов, соответствующей «плато» на функции распределения по скоростям  $f_0^\infty$ :

$$|E_k|^2 = 4\pi^2 n_1 m_e (v^3/\omega_p) (v - v_{\min})|_{v=\omega/k}. \quad (1.198)$$

Полная энергия колебаний для такого спектра

$$W = (1/4\pi) \sum_k |E_k|^2 = (1/4\pi^2) \int dv |E_k|^2 / |dv/dk| = (1/3) n_1 m u_0^2. \quad (1.199)$$

Именно такую энергию теряет пучок при квазилинейной релаксации к состоянию с плато на функции распределения:

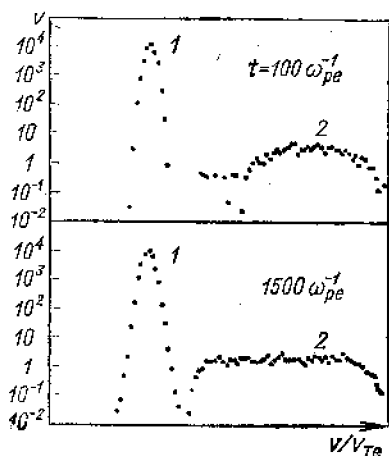
$$\Delta \omega_e = (1/2) n_1 m u_0^2 - \int_{v_{\min}}^{v_{\max}} f_0^\infty (mv^2/2) dv = (1/3) n_1 m u_0^2. \quad (1.200)$$

Следует заметить, что спектр (1.197) — это еще неокончательно установившийся спектр в системе плазма — пучок. Он может меняться в результате нелинейного взаимодействия волн. Однако для не слишком энергичного пучка, когда энергия плазменных колебаний также достаточно мала, процесс дальнейшей нелинейной эволюции спектра (1.197) существенно более медленный по сравнению со временем его установления в рамках квазилинейных уравнений. На рис. 1.30 и 1.31 приведены результаты численного моделирования и лабораторного эксперимента, иллюстрирующие образование плато на функции распределения.

Обратной по отношению к рассмотренной выше является задача о поглощении первоначально заданного пакета плазменных колебаний. Поглощение сопровождается диффузией резонансных частиц к большим скоростям и установлением «плато» на функции распределения (рис. 1.32). Спектр колебаний, устанавливаю-

Рис. 1.30. Релаксация электронного пучка малой плотности в плазме в численном эксперименте (Rowland H. L., Paradopoulos. «Phys. Rev. Lett», 1977, v. 29, p. 1276):

1 — функция распределения плазмы; 2 — функция распределения пучка. Начальные параметры пучка и плазмы: отношение их плотностей  $n_1/n_2=2 \cdot 10^{-3}$ , отношение средней скорости пучка к тепловой скорости плазмы  $u_0/v_{Te}=40$ , разброс по скоростям в пучке  $\Delta v_0=8,3v_{Te}$ . Функция распределения пучка и плазмы показана в различные моменты времени  $t$ . В результате релаксации пучка на его функция распределения образуется плато



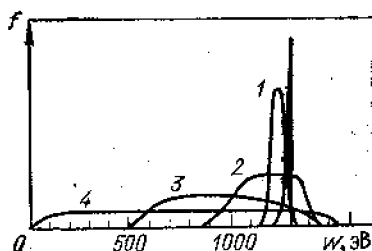
щийся в результате такого процесса, можно найти из квазилинейного интеграла энергии, при выводе которого, естественно, уже нельзя пренебречь начальными колебаниями, и поэтому в уравнении (1.197) следует заменить  $|E_h|^2 \rightarrow |E_h|^2 - |E_h|^2 (t=0)$ . Долю энергии плазменных шумов, поглощаемых в плазме, легко можно оценить с помощью закона сохранения энергии:

$$W(t=0) - W(t=\infty) \approx - \int (f^* - f^{\infty}) (mv^2/2) dv \approx n^{res} m u_0 \Delta u. \quad (1. 201)$$

При малом числе резонансных частиц  $n^{res}$  только малая часть энергии волнового пакета поглощается в плазме, поглощение практически прекращается после установления «плато» на функции

Рис. 1.31. Экспериментальное исследование релаксации электронного пучка в плазме (Левитский С. Л., Шашурин Н. М. «Журн. эксперим. и теор. физ.», 1967, т. 52, с. 350). Измерения проводились в лампе, наполненной водородом, в которую инжектировался электронный пучок; плазма создавалась самим пучком.

Показано распределение по скоростям  $f = dI/d\phi$  в зависимости от задерживающего потенциала на коллекторе,  $I$  — ток на коллектор. Функция распределения пучка измерялась при фиксированном расстоянии между катодом и коллектором электронов, но при различных значениях тока в пучке (кривые 1—4). В режиме со слабым током пучок почти моноэнергетический, при увеличении силы тока (кривая 1) происходит «размытие» функции распределения. При еще больших токах возникает характерная для квазилинейных уравнений «волна релаксации» на функции распределения, распространяющаяся в сторону малых энергий. При максимальных токах (кривая 4) на функции распределения образуется «плато»



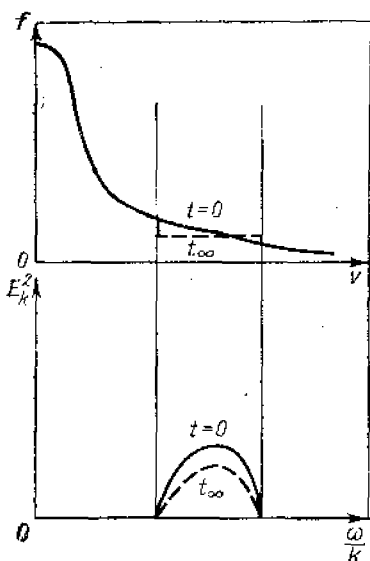


Рис. 1.32. Поглощение пакета ленгмюровских колебаний

распределения резонансных частиц. В этих условиях дальнейшее поглощение плазменных колебаний возможно только при учете обычной столкновительной диффузии, рассмотренной в § 1.9. Дело в том, что если квазилинейная диффузия приводит к установлению «плато» на функции распределения,  $\partial f_0 / \partial v \approx 0$ , то столкновения стремятся вернуть наклон функции распределения к равновесному значению. В результате возникает конкуренция между влиянием волн и влиянием столкновений, при достаточно частых столкновениях функция распределения сильно отличается от вида «плато» и затухание Ландау сохраняется.

Чтобы продемонстрировать это, введем в квазилинейное уравнение диффузии также и диффузионный член, соответствующий парным столкновениям. Для рассматриваемой задачи, в которой функция распределения существенно меняется лишь в узкой резонансной области, достаточно удержать только член со старшей производной  $(\partial / \partial v) v (T/m) (\partial f / \partial v)$ , не учитывая динамического трения.

В результате конкуренции между квазилинейным воздействием волн на частицы и столкновениями в резонансной области должно установиться некоторое квазистационарное распределение ( $\partial f_0 / \partial t = 0$ ), подчиняющееся уравнению

$$\partial / \partial v [D(v) \partial f_0 / \partial v] \approx -v(\omega^2 / k^2) (\partial^2 / \partial v^2) f_0. \quad (1.202)$$

Интегрируя уравнение (1.202) один раз, находим\*

$$\partial f_0 / \partial v \approx (\partial f_M / \partial v) / [1 + D(v) / v(\omega/k)^2]. \quad (1.203)$$

$D(v) \approx (e^2 / m^2) (|E_k|^2 / v) (kv = \omega)$  — коэффициент диффузии в резонансной области. Полученный наклон функции распределения подставим в формулу для декремента затухания  $\gamma = (\pi/2) \times \times (\omega^3 / k^2) (\partial f / \partial v)$ . В результате

$$\gamma \approx \gamma_L / [1 + e^2 \langle E^2 \rangle / m^2 v (\omega/k)^2 \Delta k]. \quad (1.204)$$

В этой формуле  $\gamma_L$  — декремент затухания Ландау, рассчитанный по максвелловской функции распределения. Для достаточно узко-

\* При этом интегрировании учитываем, что вне резонансной зоны скоростей наклон функции распределения — максвелловский  $\partial f_M / \partial v$ .

го пакета можно записать  $E^2_k \Delta k \approx \langle E^2 \rangle$ , что и было сделано при выводе формулы (1.204).

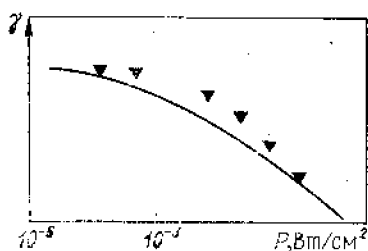
Формулу (1.204) можно интерпретировать следующим образом. Запишем ее в виде

$$\gamma \approx \gamma_L / (1 + \tau_1 / \tau_2), \quad (1.205)$$

где  $\tau_1$  — характерное время установления локального максвелловского распределения в резонансной области  $\Delta v$ ,  $\tau_1 \sim (1/\nu) (v/\Delta v)^2$ ;  $\tau_2$  — характерное время квазилинейной диффузии под действием волнового пакета. Если  $\tau_1 \ll \tau_2$ , то столкновения успевают восстановить максвелловскую функцию распределения, и мы получим обычное затухание Ландау. В случае  $\tau_2 \gg \tau_1$  функция распределения близка к «плато», и затухание стремится к нулю. На рис. 1.33 показаны результаты исследования аналогичного эффекта зависимости коэффициента усиления звука в решетке от амплитуды.

Рис. 1.33. Зависимость коэффициента электронного усиления звука от мощности вводимого в кристалл звукового потока.

В достаточно сильном электрическом поле, когда скорость дрейфа электронов оказывается «сверхзвуковой», резонансное взаимодействие звуковой волны с электронами проводимости приводит к ее усилению. Сплошная кривая — результат расчета, основанного на идеях, аналогичных изложенным в этом параграфе (см. формулу (1.204)) (Гальперин Ю. М., Каган В. Д. «Журн. эксперим. и теор. физ.», 1970, т. 59, с. 1057);  $\blacktriangledown$  — эксперимент (Иванов С. Н., Котелянский И. М., Мансфельд Г. Д., Хазанов Е. И. «Письма ЖЭТФ», 1971, т. 13, с. 283)



Отметим, что формула (1.205) применима и в случае поглощения монохроматической волны. В этом случае (см. § 1.2) при выполнении условия  $\gamma_L \tau_2 \ll 1$  фазовое размешивание резонансных частиц, захваченных в потенциальную яму, быстро «выключает» поглощение. Столкновения, также как и в случае пакета волн, восстанавливают максвелловское распределение резонансных частиц и затухание плазменной волны. Одновременный учет обоих факторов вновь приводит к формуле (1.205), где в данном случае  $\tau_2 = 1/k(e\varphi_0/m)^{1/2}$  — период фазовых колебаний захваченных частиц, определяющий время фазового размешивания,  $\tau_1 = (1/\nu) \times (\omega/k)^2 [1/(e\varphi_0/m)]$  — характерное время установления максвелловского распределения в области захвата  $\Delta v \sim (e\varphi_0/m)^{1/2}$ .

### § 1.17. Резонансное взаимодействие волн и частиц (индуцированное рассеяние)

В квазилинейных уравнениях учитывается только обычное резонансное взаимодействие волн с частицами (резонанс Ландау  $\omega - kv = 0$ ). Среди большого количества, вообще говоря, более слабых нелинейных эффектов высокого порядка (возникающих в более высоких порядках разложения по амплитуде волн) важную



роль может играть появление биений на разностных частотах между двумя любыми парами волн в спектре слабой турбулентности. Если рассматривать такие биения как новые волны, то условие их резонанса Ландау с частицами имело бы вид

$$\omega_{k_0} - \omega_{k_1} = (k_0 - k_1) v. \quad (1.206)$$

Очень часто из-за условия  $\omega_k/k \gg v_T$  обычный резонанс Ландау  $\omega - kv = 0$  выполняется только для надтепловых частиц, и из-за малого числа резонансных частиц обычные квазилинейные эффекты излучения и поглощения волн слишком малы. В этих условиях важную роль может играть резонанс на биениях, поскольку условие (1.206) может выполняться для основной массы тепловых частиц. Например, для ленгмюровских колебаний соответствующая скорость биений  $(\omega_{k_0} - \omega_{k_1}) / (k_0 - k_1) = 3(k_0 + k_1) r_D v_{Te} / 2$  всегда существенно меньше тепловой скорости электронов. Поэтому хотя резонанс (1.206) и возникает в старших порядках по амплитуде поля, в него вовлекается большое число частиц, и он может оказаться весьма существенным в динамике спектра волн.

Резонансные условия (1.182) и (1.206), также как и распадные условия (1.164), допускают наглядную квантовую интерпретацию. Мы знаем, что колебания, возбужденные в плазме, можно рассматривать как газ «квазичастиц» — элементарных «квантов» колебаний с энергией  $\hbar\omega_k$  и импульсом  $\hbar k$ . В § 1.15 было показано, что распадные условия (1.164) соответствуют законам сохранения энергии и импульса в процессах распада (слияния) квантов. Законы сохранения энергии и импульса при излучении (поглощении) кванта резонансной частицей запишутся в виде

$$\hbar\omega_k = \Delta\omega_e, \quad \hbar k = \Delta p,$$

где  $\Delta\omega_e$ ,  $\Delta p$  соответствуют изменению энергии и импульса при излучении (поглощении) кванта. Определяя  $\Delta p$  из второго условия и подставляя в первое, сокращая на постоянную Планка (ведь фактически рассматривается чисто классический случай!), приходим к резонансному условию (1.182). Аналогичным образом резонансное условие (1.206) вытекает из законов сохранения энергии и импульса при неупругом рассеянии частицей кванта  $(\omega_{k_0}, k_0)$  с превращением в квант  $(\omega_{k_1}, k_1)$ .

В задачах турбулентной плазмы «числа заполнения» для квантов плазменных колебаний велики, поэтому процессы рассеяния также становятся индуцированными, как и излучение и поглощение волн при обычном резонансе Ландау (1.182).

Рассмотрим более детально этот процесс индуцированного рассеяния для случая плазменных колебаний. Оказывается, такой процесс можно интерпретировать как параметрическую неустойчивость плазменных и ионно-звуковых колебаний в изотермической плазме  $T_e = T_i$ . В этом случае затухание низкочастотной моды (биения), обусловленное резонансным взаимодействием с ионами,

настолько велико, что декремент затухания может иметь порядок частоты, и в этом случае вообще не имеет смысла говорить об ионном звуке. Таким образом, если в обычной параметрической неустойчивости рост пробных плазменной и ионно-звуковой волн возникает в результате их параметрической связи на «фоне» плазменной накачки, то в механизме индуцированного рассеяния рост пробной плазменной волны из волны накачки обусловлен излучением и поглощением резонансными частицами (в данном случае ионами) «квантов» биений на разностной частоте. Чтобы описать этот эффект, движение ионов в низкочастотной моде биений следует рассматривать в кинетическом приближении. В этом приближении линейное уравнение для возмущения плотности плазмы совпадает с уравнением (1.174). Для учета связи низкочастотных движений с высокочастотными ленгмюровскими в это уравнение нужно добавить слагаемое, возникающее при учете высокочастотного «давления». Как было показано в § 1.15, это означает замену

$$k^2 r_D^2 \delta n \rightarrow k^2 r_D^2 \delta n + (k^2 / 16 \pi m_e \omega_p^*) (E^*)^2.$$

Выделяя в высокочастотном давлении биение двух ленгмюровских волн — основной волны  $E_0$  (накачки) и пробной  $E_1$ , получаем следующее уравнение для возмущения плотности плазмы в биениях:

$$\delta n [\epsilon_1^{-1}(\omega, k) + k^2 r_D^2] = - (k^2 / 8 \pi m_e \omega_p^*) E_0 E_1^*. \quad (1.207)$$

Здесь мы использовали обозначения  $\omega = \omega_0 - \omega_1$ ,  $k = k_0 - k_1$ ;  $\omega_0$  и  $\omega_1$ ,  $k_0$  и  $k_1$  — частоты и волновые векторы двух ленгмюровских волн (основной и пробной) соответственно.

Уравнение (1.207) следует дополнить уравнением для амплитуды пробной ленгмюровской волны  $E_1$ . Это уравнение было получено в § 1.15 [см. (1.178)]:

$$[(\omega_0 - \omega)^2 - \omega_{k_1}^2] E_1^* = (\omega_p^* / 2 n_0) \delta n E_0^*. \quad (1.208)$$

Связь пробной ленгмюровской волны  $E_1$  с волной накачки  $E_0$ , осуществляемая через биения, естественно приводит к нелинейному сдвигу частоты  $\omega_1$  по сравнению с ленгмюровской:  $\omega_1 = \omega_1'(k_1) + \delta\omega$ ,  $\delta\omega \ll \omega_1'$ , мнимая часть  $\delta\omega$  определяет инкремент нарастания пробной амплитуды  $E_1$  при неустойчивости индуцированного рассеяния. Уравнение для  $\delta\omega$ , как обычно, получается из условия разрешимости уравнений (1.207) и (1.208). Определим  $E_1$  из (1.208):  $E_1^* \approx \omega_p \delta n E_0^* / 4 n_0 \delta\omega^*$  и подставим результат в (1.207). Преобразуем последнее уравнение. Разобьем диэлектрическую проницаемость ионов на действительную и мнимую части (см. § 1.12):  $\epsilon_i = \epsilon'_i + i\epsilon''_i$ . Будем для простоты считать, что  $\epsilon''_i \ll \epsilon'_i$  и  $\epsilon'_i$  определим из условия квазинейтральности:  $\epsilon'_i = \epsilon'_e = 1 / k^2 r_D^2$ . Тогда из уравнения (1.207) получим следующую формулу для инкремента нарастания пробной волны при индуцированном рассеянии:

$$\text{Im } \delta\omega = \omega_p k^2 E_0^2 r_D^2 \epsilon''_i(\omega, k) / 128 \pi n_0 T. \quad (1.209)$$

Как мы уже знаем, мнимая часть диэлектрической проницаемости связана с особенностью подынтегрального выражения в формуле (1.128) при  $v = \omega/k$ , т. е. для скоростей, соответствующих резонансу Ландау между частицами и биением. Будем считать, что скорость резонансных ионов существенно меньше их тепловой скорости, а функция распределения ионов по скоростям совпадает с максвелловской. Вычисляя при этих предположениях  $\epsilon''_i$  и подставляя результат в (1.209), приходим к окончательной формуле для инкремента индуцированного рассеяния:

$$\text{Im } \delta\omega = (\pi/8)^{1/2} \omega_p E^2 \omega_0^3 (k_0^2 - k_1^2) r_D (m_i/m_e)^{1/2} / 128 \pi n_0 T |k_0 - k_1|. \quad (1.210)$$

Неустойчивость на индуцированном рассеянии возникает в том случае, когда пробная волна имеет большую длину волны, чем накачка:  $k_0 > k_1$ .

Очевидно, что когда пробная плазменная волна возникает не из монохроматической накачки, а из пакета плазменных волн, то инкремент неустойчивости также можно получить из (1.210) с помощью очевидной замены  $|E_0|^2/4 \rightarrow \sum_{k_0} |E_{k_0}|^2$  [множитель 1/4 возникает из-за используемой здесь нормировки, см. (1.135)]. Тогда вместо (1.210) имеем

$$\left. \begin{aligned} \text{Im } \delta\omega(k) &= 3\omega_p r_D (\pi m_i / 8 m_e)^{1/2} \times \\ &\times \sum_{k_0} |E_{k_0}|^2 (k_0^2 - k_1^2) / |k_0 - k_1| [32 \pi n_0 T; \\ d|E_{k_1}|^2/dt &= 2\text{Im } \omega(k) |E_{k_1}|^2. \end{aligned} \right\} \quad (1.211)$$

Остановимся на некоторых интересных следствиях этой формулы. Прежде всего видно, что при индуцированном рассеянии перекачка энергии происходит в длинноволновую часть спектра [инкремент в (1.211) положителен при  $k_0 > k_1$ ]. Это достаточно очевидный результат — при рассеянии на плазме с равновесной максвелловской функцией распределения преобладают процессы поглощения виртуальных квантов, поэтому часть энергии рассеивающегося плазмона поглощается частицей и рассеянный плазмон должен иметь меньшую частоту и, следовательно, меньшее волновое число. Число плазмонов  $N_k$  при рассеянии, естественно, сохраняется. Кроме того, поскольку энергию плазменных волн можно представить в виде  $N_k \hbar \omega_k = N_k \hbar \omega_p (1 + 3k^2 r_D^2 / 2)$ , а при рассеянии изменяется только небольшая тепловая поправка к частоте, то энергия плазменных волн в процессе рассеяния также остается примерно постоянной. Действительно, с помощью (1.211) нетрудно показать, что

$$(d/dt) \sum_{k_1} |E_{k_1}|^2 = 0.$$

Максимальную величину инкремента, характеризующего индуцированное рассеяние, легко можно получить из (1.210), а именно при  $(\omega_0 - \omega_1) / |k_0 - k_1| \approx v_{Te}$  имеем

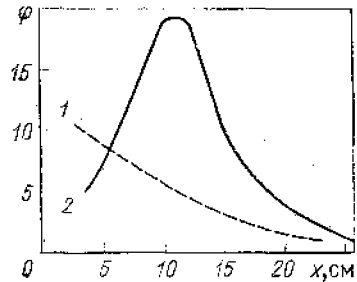
$$\gamma_{\max} \approx \omega_p (E^2_0 / 64 \pi n_0 T). \quad (1.212)$$

Изменение волнового числа плазмона в отдельном акте  $\Delta k$  рассеяния определяется соотношением  $\omega_0 - \omega_1 \approx 3k \Delta k r_D^2 \omega_p \sim k v_{Te}$ . Отсюда  $\Delta k \sim (m_e / m_i)^{1/2} / 3r_D$ . Таким образом, в области не очень малых волновых чисел  $kr_D > (m_e / m_i)^{1/2}$  перекачка по спектру носит дифференциальный характер. Так же, как и при параметрической неустойчивости с рождением ионно-звуковых волн в этом случае в процессе индуцированного рассеяния оказываются связанными друг с другом две распространяющиеся навстречу плазменные волны  $k_0 \approx -k_1$ . Изменение волнового числа при рассеянии  $k_0 + k_1 \approx \Delta k$  мало по сравнению с шириной спектра. Из уравнения (1.211) в этом случае нетрудно показать, что характерный инкремент, определяющий скорость нелинейного изменения всего спектра, уменьшается по сравнению с (1.212) в  $(k / \Delta k)^2$  раз:

$$\gamma_{\text{нелин}} = \gamma_{\max} (\Delta k / k)^2 \approx \omega_p \sum_{k_0} |E_{k_0}|^2 m_e / 16 \pi n_0 T m_i k^2 r_D^2. \quad (1.213)$$

Экспериментальный результат, иллюстрирующий явление индуцированного рассеяния плазменных колебаний, приведен на рис. 1.34.

Рис. 1.34. Экспериментальное исследование неустойчивости монохроматической волны, обусловленной индуцированным рассеянием на частицах плазмы (Измайлов А. Н. и др. «Письма ЖЭТФ», 1970, т. 12, с. 73).



Эксперимент проводился в деэвовой плазме с температурой  $\sim 2000$  К. Возбуждались две ленгмюровские волны — основная и пробная, частоты которых удовлетворяли условию  $|\omega_1 - \omega_0| \sim k v_{Te}$ . Показано распределение амплитуды пробной волны по длине плазменного шнура в отсутствие основной волны (кривая 1) и при наличии основной волны (2), частота которой больше, чем у пробной. Рост амплитуды связан с неустойчивостью индуцированного рассеяния; уменьшение амплитуды при больших  $x$  связано с затуханием основной волны до значений, при которых инкремент индуцированного рассеяния становится меньше декремента затухания Ландау.

Инкремент определяет, в частности, скорость длинноволновой перекачки энергии в спектре колебаний (1.197), возбуждаемых при релаксации электронного пучка в плазме. Поэтому квазилинейная теория процесса релаксации, изложенная в первой части данного параграфа, применима, если при максимальном уровне энергии колебаний  $W$ , определяемом формулой (1.199), инкремент нелинейной перекачки энергии по спектру остается меньше инкремента пучковой неустойчивости. В этом случае вначале происходит квазилинейная релаксация пучка, а затем возбужденный пучком спектр колебаний постепенно трансформируется в резуль-

тате индуцированного рассеяния. Для сильно размытого пучка  $\Delta v \sim v$  согласно (1.154) инкремент пучковой неустойчивости  $\gamma_{\text{лин}} \sim \omega_p n_1/n_0$ . Волновое число неустойчивых колебаний  $k \sim \omega_p/c_0$ , поэтому параметр  $k^2 r_D^2 \sim T/m_i u^2_0$  и сформулированное выше условие применимости квазилинейной теории можно записать в виде

$$\epsilon = \gamma_{\text{лин}}/\gamma_{\text{нелин}} \sim (n_1/n_0) / [n_1 m_e u^2_0/n_0 T] \times \times (m_e u^2_0/T) (m_e/m_i) \sim m_i (T/m_e u^2_0)^2 m_e \gg 1. \quad (1.214)$$

Для энергичных пучков, когда параметр  $\epsilon \ll 1$ , имеет место так называемый эффект нелинейной стабилизации пучковой неустойчивости. Энергия плазменных колебаний, возбуждаемых пучком, растет до значения  $\epsilon W$ . В дальнейшем откачка колебаний из резонансной для пучка области спектра, связанная с индуцированным рассеянием, стабилизирует пучковую неустойчивость, и колебания все время поддерживаются на уровне  $\epsilon W$ . Поскольку коэффициент диффузии частиц пучка по скоростям пропорционален плотности энергии колебаний в резонансной области, то время диффузии, т. е. время релаксации пучка, возрастает в  $1/\epsilon$  раз по сравнению с квазилинейным. Происходит как бы просветление плазмы для электронного пучка — явление, часто наблюдающееся в космической плазме (плазма солнечного ветра, магнитосферная плазма), где лучок проходит огромные расстояния, без существенной потери энергии.

### § 1.18. Нелинейное взаимодействие волн в слабой турбулентности

До сих пор мы исследовали взаимодействие в слаботурбулентной плазме между газом частиц — электронов либо ионов и газом квазичастиц — элементарных волновых движений. В данном параграфе рассмотрена слабая турбулентность и проанализировано взаимодействие между волнами, т. е. внутри газа квазичастиц. Физический механизм, лежащий в основе такого взаимодействия, связан с исследованной в § 1.14 параметрической неустойчивостью и проявляется в процессах распада и слияния элементарных волновых квантов. Газ элементарных волновых движений можно задавать функцией распределения квантов определенного типа (ленгмюровских, звуковых) по волновым числам  $N_{\alpha}(t, k)$ , подобно тому как электроны и ионы плазмы характеризуются функцией распределения по скоростям  $f_{\alpha}(t, v)$ . Выше мы вводили спектральное распределение энергии колебаний по волновым числам  $W_k = |E_k|^2/8\pi$  (либо  $\epsilon_k = (|E_k|^2 + |H_k|^2)/8\pi$  для электромагнитных колебаний). Поскольку энергия отдельного кванта равна  $\hbar\omega_k$ , то имеем очевидное соотношение

$$N_k = W_k/\omega_k \quad (1.215)$$

(рассмотрение удобно проводить в системе единиц с  $\hbar=1$  — так как рассматриваются чисто классические эффекты, то постоянная Планка из окончательных формул должна выпасть).

В предыдущих параграфах были выведены кинетические уравнения для функции распределения частиц, учитывающие столкновения частиц с частицами и частиц с волнами. Теперь мы можем ввести в рассмотрение кинетическое уравнение для числа квантов. Схематически такое кинетическое уравнение можно записать в виде

$$\partial N_k / \partial t = \text{St}\{N_k\} + 2\gamma_k N_k. \quad (1.216)$$

Первое слагаемое в правой части этого уравнения — так называемый интеграл столкновений волн с волнами. Под такими столкновениями условно понимается результат нелинейного взаимодействия волн друг с другом. Кроме того, в нелинейной задаче обязательно должны присутствовать источник и сток энергии, как, например, накачка энергии в турбулентность за счет какого-либо механизма неустойчивости и поглощение волн частицами. Эти процессы схематически описываются в уравнении (1.216) вторым слагаемым в правой части. Достаточно очевидно, что конкретная структура интеграла столкновений зависит от типа волнового взаимодействия. В простейшем случае, если закон дисперсии взаимодействующих волн  $\omega(\mathbf{k})$  допускает трехволновое взаимодействие, описываемое распадными условиями (1.164), то интеграл столкновений будет квадратичен по числу квантов:

$$\text{St}\{N_k\} \rightarrow \int d\mathbf{k}_1 d\mathbf{k}_2 V(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}) N_{\mathbf{k}_1} N_{\mathbf{k}_2}. \quad (1.217)$$

Мы ограничимся такой символической записью интеграла столкновений. Для получения его конкретного вида следовало бы использовать динамические уравнения параметрической неустойчивости в форме, аналогичной (1.178), перейти в них к числам заполнения  $N_k$ , используя предположения о случайных фазах взаимодействующих волн и о медленности изменения их амплитуд  $\text{Im} \omega_k / \omega_k \ll 1$ . Вся эта процедура достаточно громоздка, и ее детальное описание выходит за рамки настоящей книги. Напомним только, что волновые векторы в интеграле столкновений  $\mathbf{k}$ ,  $\mathbf{k}_1$ ,  $\mathbf{k}_2$  и соответствующие им частоты  $\omega_{\mathbf{k}}$ ,  $\omega_{\mathbf{k}_1}$ ,  $\omega_{\mathbf{k}_2}$  должны быть связаны распадными условиями  $\omega_{\mathbf{k}} = \omega_{\mathbf{k}_1} + \omega_{\mathbf{k}_2}$ ,  $\mathbf{k} = \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2$ .

Естественно, что не при всяком спектре волн выполняются эти соотношения. На рис. 1.35 показаны различные формы возможных спектров волн. Используя векторное неравенство  $|\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2| < |\mathbf{k}_1| + |\mathbf{k}_2|$ , нетрудно показать, что приведенные выше распадные условия могут быть выполнены для волн со спектрами II, и наоборот,

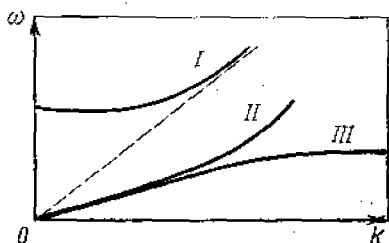


Рис. 1.35. Распадные и нераспадные спектры плазменных колебаний

для волн со спектрами типа *I*, *III* (см. рис. 1.35) это невозможно (нераспадные спектры). Если дисперсионное соотношение имеет более чем одну ветвь, то распадные условия могут быть выполнены для волн, принадлежащих к различным ветвям. Так, для ленгмюровских колебаний (спектр нераспадный), распадные условия могут выполняться при распаде на ленгмюровскую и ионно-звуковую ветви колебаний. В общем случае распадным условиям удастся удовлетворить в тех случаях, когда через три точки, соответствующие колебаниям  $(\omega, \mathbf{k})$ ,  $(\omega_1, \mathbf{k}_1)$ ,  $(\omega_2, \mathbf{k}_2)$  (эти точки могут лежать на различных ветвях), можно провести кривую, аналогичную кривой *II*.

В тех случаях, когда распадные условия для трех волн не выполнены, в элементарный акт взаимодействия включается четыре  $\omega = \omega_1 + \omega_2 + \omega_3$ ,  $\mathbf{k} = \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3$  и соответственно этому интеграл столкновений становится кубическим по числу квантов:

$$\text{St}\{N_k\} \rightarrow \int dk_1 dk_2 dk_3 V(k, k_1, k_2, k_3) N_{k_1} N_{k_2} N_{k_3}.$$

Обсудим теперь соотношение между теорией слаботурбулентной плазмы и колмогоровской теорией турбулентности несжимаемой жидкости. Строгое аналитическое описание гидродинамической тур-

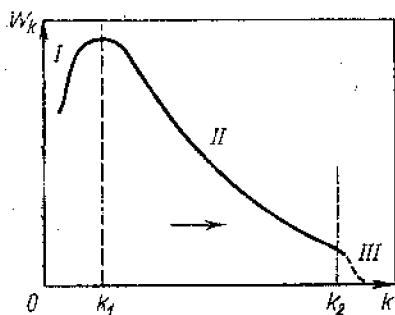


Рис. 1.36. Спектры турбулентности в случае постоянства потока энергии по спектру в интервале равновесия (*III*) между областями раскачки (*I*) и затухающей (*II*)

булентности крайне затруднительно, так как турбулентное движение уже нельзя представить в виде набора собственных мод (вместо них мы имеем набор непрерывно дробящихся вихрей). Поэтому в гидродинамической турбулентности у нас нет эквивалента такого статистического описания, какое в слабой турбулентности дает приведенное выше кинетическое уравнение, и наиболее надежные оценки основаны на соображениях размерности. Представим себе ситуацию, когда источник крупномасштабного (малые  $k$ ) турбулентного движения (рис. 1.36, область источника *I*) отделен от области, где турбулентное движение быстро затухает из-за увеличения вязкой диссипации в мелких масштабах (область поглощения *III*). Тогда энергия турбулентных движений перекачивается от больших масштабов к меньшим из-за процесса нелинейного дробления масштабов вихрей, проходя последовательно все уменьшающиеся масштабы инерционного интервала (область *II*). Хорошо известные размерностные соображения приводят к следующему спектру турбулентности в инерционном интервале:

$$W_k \sim 1/k^{5/3} \quad (1.218)$$

(закон Колмогорова — Обухова). Эти соображения основаны на предположении о постоянстве потока энергии по спектру в инерционном интервале. Количественно это условие записывается в виде

$$W_k k / \tau_k = \text{const.} \quad (1.219)$$

Здесь  $W_k$  — спектральная плотность турбулентных движений;  $\tau_k$  — характерное время перекачки энергии, зависящее от  $k$ ;  $k/\tau$  имеет смысл скорости переноса в  $k$ -пространстве. Поскольку этот процесс вызван нелинейным слагаемым  $(v \nabla) v \sim kv^2$  в уравнении Эйлера (1.102), то из соображений размерности имеем

$$1/\tau_k \sim kv. \quad (1.220)$$

Здесь  $v$  — скорость в турбулентных пульсациях масштаба  $k^{-1}$ . Очевидно, что энергию этих пульсаций  $kW_k$  можно записать в виде  $n_0 M v^2$ , и из (1.220) имеем размерностную оценку

$$1/\tau_k \sim k [kW_k]^{1/2}, \quad (1.220a)$$

которая вместе с условием (1.219) дает закон турбулентности Колмогорова — Обухова. Интересно найти аналог колмогоровского спектра в слабой турбулентности плазмы, когда такой спектр может быть получен не только из размерностных оценок, но и из точного решения кинстического уравнения. Однако сложность плазменной задачи состоит в том, что даже в изотропной плазме существуют различные взаимодействующие между собой ветви колебаний: плазменные, звуковые, электромагнитные, так что некоего универсального спектра с простой степенной зависимостью не существует. Поэтому искать такой спектр имеет смысл лишь в некоторых случаях, когда возбужден определенный тип волн. При этом наиболее просто решается вопрос о спектре ионно-звуковой турбулентности.

Пусть источник такой турбулентности находится в области достаточно длинных масштабов. Спектр ионно-звуковых колебаний в области больших длин волн, когда несущественна дисперсия фазовой скорости, — распадный, причем во взаимодействие вовлекаются колебания с коллинеарными (или, точнее, почти коллинеарными) волновыми векторами. Процесс коротковолновой перекачки энергии связан тогда со слиянием ионно-звуковых квантов, которое описывается уравнением (1.217). Из этого уравнения имеем следующую оценку  $\tau_k$  (с учетом соображений размерности)

$$1/\tau_k \sim \omega_k k W_k / n_0 T_e. \quad (1.221)$$

Вследствие распадности спектра ионно-звуковых колебаний энергия турбулентных пульсаций  $kW_k$  входит в формулу для  $\tau_k^{-1}$  в первой степени. Эта энергия нормируется на тепловую энергию в плазме  $n_0 m_i \omega^2 / k^2 = n_0 T_e$ . Величина  $\omega_k = k(T_e / m_i)^{1/2}$  — единственная в рассматриваемой задаче имеющая размерность частоты.



Используя условие постоянства потока энергии в инерционном интервале — (1.219) и оценку (1.221) для  $\tau_k$ , получаем следующий спектр ионно-звуковой турбулентности:

$$W_k \sim 1/k^{3/2}. \quad (1.222)$$

Эта формула определяет спектр турбулентности в масштабах инерционного интервала, отделяющего область источника от коротковолновой области поглощения звуковых колебаний ионами плазмы. Тот же степенной спектр ионно-звуковой турбулентности был получен путем строгого решения кинетического уравнения для волн.

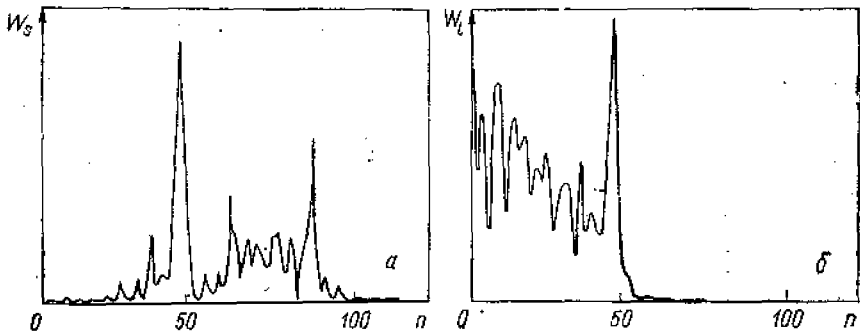


Рис. 1.37. Спектры ленгмюровских и ионно-звуковых волн, возникающих при электромагнитной накачке, численный эксперимент (Горбушина Т. А. и др. Препринт Ин-та прикл. мат. АН СССР, 1978. № 17).

По осям отложена спектральная плотность энергии ионно-звуковых (а) и ленгмюровских (б) колебаний в зависимости от номера гармоники  $n$ . Распад электромагнитной волны накачки приводит к рождению гармоники плазменной волны с  $n \approx n_0$ . Эстафетная перекачка энергии (распады  $l \rightarrow l \pm s$ ) в длинноволновую часть спектра ленгмюровских волн приводит к установлению спектральных распределений, показанных на рисунке.

Значительно сложнее решается задача о турбулентности ленгмюровских колебаний. Дело в том, что спектр ленгмюровских колебаний — нераспадный и основные нелинейные процессы в слабой ленгмюровской турбулентности — распад с рождением ионно-звуковых колебаний, а в изотермической плазме  $T_e = T_i$  — индуцированное рассеяние на ионах плазмы. В элементарных актах, соответствующих каждому из этих процессов, часть энергии ленгмюровского кванта передается ионно-звуковому кванту либо рассеивающей частице. Поэтому нелинейное взаимодействие в ленгмюровской турбулентности сопровождается «покраснением» ленгмюровских квантов, т. е. перекачкой ленгмюровской энергии в область длинных масштабов и больших фазовых скоростей, где вообще невозможно резонансное поглощение энергии волн частицами. Так, в ленгмюровской турбулентности возникает проблема аккумуляции энергии при  $k \rightarrow 0$  и образования «плазмонного конденсата» (наподобие «Бозе-конденсата»). Тенденция к образованию конден-

сата в процессе нелинейного взаимодействия плазмонов хорошо видна в численном эксперименте (рис. 1.37). Разгадка парадокса «конденсации» плазменных колебаний имеет важное значение в физике нелинейных колебаний и турбулентности плазмы. Эта проблема подробно обсуждается в следующем параграфе.

### § 1.19. Модуляционная неустойчивость и коллапс ленгмюровских волн

Оказывается, что «конденсат» — достаточно интенсивный газ длинноволновых плазмонов — неустойчив относительно процесса модуляции его плотности и образования каверн — областей локализации более высокой концентрации волновой энергии, из которых под действием силы высокочастотного давления вытеснена плазма. Физический смысл неустойчивости можно разъяснить достаточно наглядно. Представим себе, что на первоначально однородном фоне ленгмюровских волн хотя бы в результате флуктуации возникла область, где амплитуда колебаний электрического поля несколько превышает средний уровень. В результате в этой области возрастает и высокочастотное давление, так что электроны из нее вытесняются. Возникающее при поляризации плазмы квазистатическое электрическое поле вытягивает ионы вслед за электронами, образуется квазинейтральный профиль пониженной плотности. Как движутся плазмоны на таком профиле плотности? Мы знаем, что каждый плазмон — это квазичастица с энергией  $\omega_r(r) \approx \omega_{p0}(1 + \delta n(r)/2n_0) + (3/2)k^2 r^2_D \omega_{p0}$  и импульсом  $k$  (здесь  $n = n_0 + \delta n$  — плотность плазмы;  $\omega_{p0}$  — плазменная частота, соответствующая невозмущенной плотности). Поэтому уравнения движения плазмона, записанные в гамильтоновой форме, имеют вид

$$\left. \begin{aligned} dk/dt &= -\partial\omega/\partial r = -\omega_{p0} \partial\delta n/\partial r; \\ dr/dt &= \partial\omega/\partial k = 3kr^2_D \omega_{p0}. \end{aligned} \right\} \quad (1.223)$$

Из этих уравнений очевидно, что профиль с пониженной плотностью играет роль потенциальной ямы для плазмона. Действительно, в этом случае сила  $F \sim \partial k/\partial t$  ускоряет те плазмоны, которые движутся на дно ямы, и тормозит движущиеся в обратном направлении. В результате достаточно медленные плазмоны захватываются в потенциальную яму, возрастают высокочастотное давление и, следовательно, деформация профиля плотности, потенциальная яма становится глубже, что приводит к дальнейшему росту локальной интенсивности ленгмюровских волн и высокочастотного давления. Таким образом, развивается неустойчивость автомодуляции пространственного распределения плазмонов — стягивание их в сгустки-каверны.

Из проведенного анализа ясно, что при неустойчивости изменяется характер траекторий плазмонов. Если в отсутствие взаимодействия плазмоны двигались по пролетным траекториям с по-

стоянной скоростью  $d\omega/dk$ , то при развитой модуляционной неустойчивости они оказываются запертыми в кавернах, аналогично тому как достаточно сильная волна захватывала резонансные частицы плазмы в потенциальную яму. Так же как эффект захвата резонансных частиц волной не описывается квазилинейными уравнениями, захват плазмонов в каверны и развитие модуляционной неустойчивости нельзя описать в рамках слабой турбулентности. Возникающая в результате модуляционной неустойчивости турбулентность ленгмюровских волн является сильной — волновые движения, из которых она складывается, существенно отличаются от линейных мод колебаний. Ниже проведен качественный анализ этой проблемы.

Начнем с простого эвристического рассмотрения модуляционной неустойчивости, использующего аналогию между распределением плазмонов в неоднородной плазме  $\delta n(\mathbf{r})$  и больцмановским распределением заряженных частиц в потенциальном поле  $\varphi(\mathbf{r})$ . Хорошо известно, что функция распределения электронов в таком поле имеет вид

$$f(v) = n_0 (m/2\pi T)^{3/2} \exp\{-mv^2/2T + e\varphi/T\}. \quad (1.224)$$

Интегрирование по скоростям в этой формуле приводит к распределению Больцмана для плотности распределения электронов в потенциальном поле.

По аналогии с максвелловским распределением равновесную функцию распределения плазмонов в отсутствие деформаций плотности условно представим в виде

$$N_{\mathbf{k}} = N_0 \exp\{-k^2/\bar{k}^2\} / \pi^{3/2} \bar{k}^3. \quad (1.225)$$

Из закона дисперсии ленгмюровских волн имеем  $k^2/\bar{k}^2 = 2(\omega - \omega_{p0})/3\omega_{p0}\bar{k}^2 r_D^2$ , поэтому равновесное распределение можно представить следующим образом:

$$N_{\mathbf{k}} = N_0 \exp\{-2(\omega - \omega_{p0})/3\omega_{p0}\bar{k}^2 r_D^2\} / \pi^{3/2} \bar{k}^3.$$

При наличии деформаций плотности плазмы  $\delta n(\mathbf{r})$  величина  $\omega - \omega_{p0} = (\bar{k}^2 r_D^2/2 + \delta n/2n_0)\omega_{p0}$  (первое слагаемое — кинетическая энергия плазмона, второе — его потенциальная энергия). В этом случае равновесное распределение плазмонов (1.225) трансформируется в следующее:

$$N_{\mathbf{k}} = N_0 \exp\{-k^2/\bar{k}^2 - \delta n/3\bar{k}^2 r_D^2 n_0\} / \pi^{3/2} \bar{k}^3. \quad (1.226)$$

Если равновесное распределение (1.225) — аналог максвелловского распределения для частиц, то распределение (1.226) — аналог больцмановского распределения в потенциальном поле  $\varphi(\mathbf{r})$ . Интегрируя по  $\mathbf{k}$ , находим полную плотность плазмонов

$$\int d\mathbf{k} N_{\mathbf{k}} = N_0 \exp\{-\delta n/3\bar{k}^2 r_D^2 n_0\}. \quad (1.227)$$

Из этой формулы действительно следует, что плазмоны имеют тенденцию скапливаться в местах провала плотности плазмы. Возмущение плотности плазмонов определяется формулой

$$\delta N = -N_0 \delta n / 3\bar{k}^2 r_D^2 n_0$$

в полной аналогии с возмущением электронной плотности  $\delta n = -n_0 e \varphi / T_e$ . Соответствующее возмущение высокочастотного давления

$$\delta p_{вч} = -p_0 \delta n / 3\bar{k}^2 r_D^2 n_0 \quad (1.228)$$

( $p_0 = \langle E^2 \rangle / 8\pi$  — равновесное давление плазмонов) по знаку обратно возмущению плотности, что, собственно говоря, и приводит к неустойчивости.

Для получения количественной формулы напомним, что линеаризованные уравнения медленных квазинейтральных движений плазмы имеют вид [ср. с (1.118)]

$$-n_i m_i i\omega v = -i\bar{k}\delta p; \quad -i\omega \delta n + i\bar{k}n_0 v = 0, \quad (1.229)$$

где  $\delta p$  — суммарная вариация давления в плазме, состоящая из вариаций высокочастотного и газокINETического давлений:

$$\delta p = T\delta n + \delta p_{вч}$$

Подставляя в (1.229)  $\delta p_{вч}$  из формулы (1.228), получаем следующее дисперсионное уравнение:

$$\omega^2 = \bar{k}^2 T [1 - \langle E^2 \rangle / k^2 r_D^2 16\pi n_0 T] / m_i \quad (1.230)$$

Условие неустойчивости  $\omega^2 < 0$ , т. е.

$$\langle E^2 \rangle / 16\pi n_0 T > \bar{k}^2 r_D^2, \quad (1.230a)$$

и в процессе накопления длинноволновых ( $k \rightarrow 0$ ) плазмонов по каналам слабой турбулентности обязательно должна возникнуть модуляционная неустойчивость. При  $\langle E^2 \rangle / 16\pi n_0 T \gg \bar{k}^2 r_D^2$  имеем из (1.230) следующую оценку для инкремента модуляционной неустойчивости:

$$\begin{aligned} \text{Im } \omega &\approx (\langle E^2 \rangle / 16\pi n_0 m_i r_D^2)^{1/2} \approx \\ &\approx \omega_p (m_e \langle E^2 \rangle / m_i 16\pi n_0 T)^{1/2}. \end{aligned} \quad (1.231)$$

Весьма важным является вопрос о дальнейшей динамике образующихся в результате модуляционной неустойчивости каверн. Для запертых в каверне плазмонов кинетическая энергия порядка потенциальной, т. е.

$$k^2 r_D^2 \sim |\delta n| / n_0 \quad (1.232)$$

Длина волны запертого плазмона определяет одновременно характерный размер каверны  $l \sim 1/k$ . Под действием силы высокоча-

стотного давления плазма вытесняется из каверны. Рост  $|\delta n|$  сопровождается схлопыванием каверны, так как  $l \sim 1/(\delta n)^{1/2}$ . При этом плотность энергии колебаний возрастает и происходит ускорение процесса выталкивания плазмы и схлопывания каверны, который, таким образом, носит взрывной характер. Естественно возникает вопрос о том, что останавливает схлопывание. Ограничимся качественным анализом этого вопроса, основывающимся на соотношении (1.232) между длиной волны запертых плазмонов и глубиной модуляции плотности, а также на условии постоянства числа запертых в каверне плазмонов. Так как глубина модуляции плотности в каверне обычно невелика  $|\delta n|/n_0 < 1$  и соответственно мало изменение частоты плазмона  $\delta\omega \ll \omega$ , то последнее условие означает, что

$$\int dr |E|^2 = \text{const}, \quad (1.233)$$

и, таким образом, высокочастотное давление в каверне возрастает при схлопывании обратно пропорционально ее объему  $|E|^2 \sim 1/l^3$  ( $s$  принимает значения 1, 2, 3 в зависимости от размерности каверны). В то же время для схлопывания необходимо преодолеть давление вытесняемой плазмы  $\delta n T$ , которое согласно (1.232) возрастает как  $l^{-2}$ . Отсюда следует, что динамика каверны существенно зависит от ее размерности. В одномерной каверне (локализация ленгмюровской энергии только по одному измерению) газокинетическое давление при схлопывании возрастает быстрее высокочастотного. В результате при некотором  $l$  установится баланс давлений и образуется солитон — ленгмюровский сгусток конечного размера, который, однако, неустойчив относительно модуляции в двух других измерениях.

В двумерном случае ( $s=2$ ) если только в начальный момент времени высокочастотное давление в камере превышало газокинетическое, то в дальнейшем схлопывания каверны не остановит. Наконец, в трехмерном случае высокочастотное давление при схлопывании возрастает быстрее газокинетического и процесс схлопывания идет с нарастающей скоростью. В каждом из двух случаев схлопывание каверны с запертыми в ней плазмонами происходит до столь малых размеров, что длина волны плазмона становится сравнимой с дебаевской длиной (а фазовая скорость сравнимой с тепловой скоростью) и «включается» резонансное поглощение плазмонов частицами плазмы — затухание Ландау. Явление схлопывания образующихся при модуляции неустойчивости каверн с плазмонами, которое имеет характер взрыва и ограничено только затуханием Ландау, получило название коллапса ленгмюровских волн. Коллапс ленгмюровских волн описывается полученными в параграфе о параметрической неустойчивости уравнениями (1.173) и (1.176) для электрического поля и вариаций плотности. Особенность рассматриваемого случая по сравнению с решениями, полученными в § 1.14, связана с тем, что из-за наличия сильного взаимодействия моды колебаний, описываемые уравнениями (1.230), (1.231), существенно отличаются от линейных.

Связь между вариацией плотности в каверне и высокочастотным давлением определяется уравнением (1.176), в котором в многомерном случае следует заменить оператор дифференцирования  $\partial^2/\partial x^2$  на оператор Лапласа  $\Delta$ .

Из этого уравнения следует, что схлопывание каверны с плазмонами носит характер «взрыва», когда сколь угодно малые размеры каверны и сколь угодно большие значения плотности энергии в ней достигаются за конечное время. Действительно, полагая, что скорость схлопывания каверны превышает скорость звука, сохраним в левой части уравнения (1.176) только первое слагаемое. Кроме того, из условия захвата плазмонов каверной (1.232) находим, что

$$\delta n/n_0 \sim r_D^2/l^2 \sim r_D^2 \Delta. \quad (1.234)$$

Таким образом, получим вместо уравнения (1.176) следующую оценочную формулу:

$$\partial^2 \delta n / \partial t^2 \approx \delta n |E|^2 / (16\pi n_0 m_i r_D^2). \quad (1.235)$$

Из этой формулы следует, что рост  $\delta n$  и  $|E|^2$  происходит быстрее, чем по экспоненте, т. е. по закону «взрыва»  $1/(t_0 - t)^\alpha$ ,  $\alpha > 0$ ,  $t_0$  — время «взрыва», т. е. время достижения особенности. Из уравнения (1.235) следует, что

$$|E|^2 \approx 1/(t_0 - t)^2, \quad (1.236)$$

а законы изменения  $\delta n$  и  $l$  со временем находим из условия (1.233) постоянства числа запертых в каверне плазмонов. В случае трехмерных каверн имеем

$$\left. \begin{aligned} l &\sim |E|^{2/3} \sim (t_0 - t)^{2/3}; \\ \delta n &\sim 1/l^2 \sim 1/(t_0 - t)^{4/3}. \end{aligned} \right\} \quad (1.237)$$

Более точно динамику ленгмюровского коллапса рассчитывали численными методами (рис. 1.38) и подтвердили взрывной характер схлопывания, описываемый формулами (1.236) и (1.237).

Выясним теперь, как выглядит картина ленгмюровской турбулентности при наличии коллапса каверн. Вначале энергия ленгмюровских волн по каналам слабой турбулентности перекачивается в длинноволновую область модуляционной неустойчивости. Из-за этой неустойчивости энергия ленгмюровских волн локализуется в большом числе случайно расположенных каверн, коротковолновая перекачка запертых в кавернах ленгмюровских колебаний осуществляется в процессе коллапса.

Между длинноволновыми масштабами модуляционной неустойчивости  $l_0 \sim 2\pi r_D (16\pi n_0 T / \langle E^2 \rangle)^{1/2}$  (см. рис. 1.36, область I) и коротковолновыми масштабами области поглощения  $l_* \sim 2\pi r_D$  (область III) лежит инерционный интервал. Через масштабы инерционного интервала ленгмюровская энергия пронесется схлопывающимися кавернами. Спектр турбулентности в инерционном интер-

вале, как обычно, можно найти из условия постоянства потока энергии — условия (1.219). В рассматриваемом случае это условие имеет следующий вид:

$$|E_k|^2 \sim W_k \sim dt(k) / dk. \quad (1.238)$$

Здесь  $dt(k)$  — время прохождения кавернами через интервал  $[k, k+dk]$  обратных масштабов турбулентности. Закон схлопывания, т. е. зависимость  $k \sim 1/l$  от  $t$ , определяется формулой (1.237), откуда вместе с условием (1.238) имеем следующую формулу для

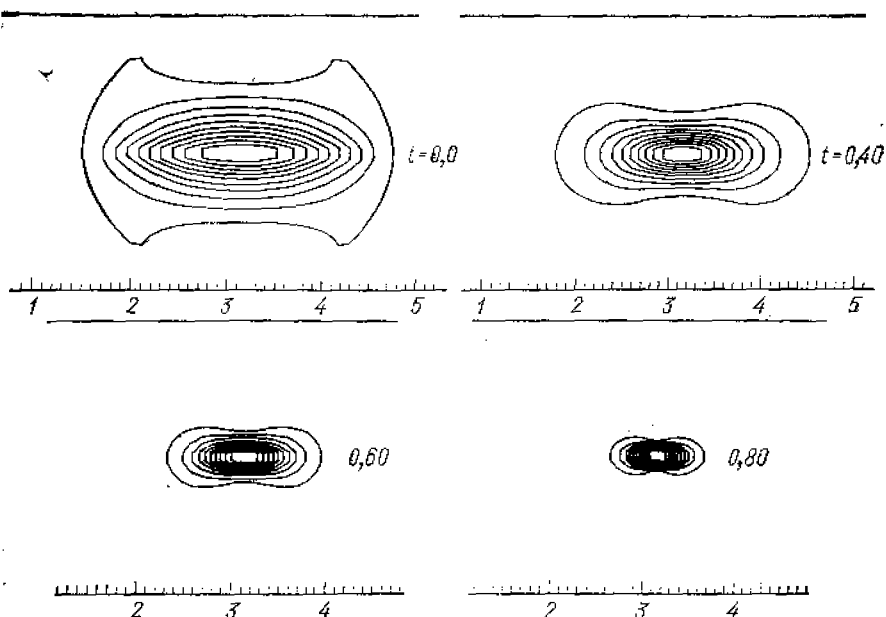


Рис. 1.38. Численный эксперимент, иллюстрирующий динамику сжатия каверны при коллапсе ленгмюровских волн. (Дегтярев Л. М., Захаров В. Е., Рудаков Л. И. «Физика плазмы», 1976, т. 2, с. 438).

Показаны линии уровня амплитуды электрического поля в двумерной каверне в различные моменты времени  $t$ . Законы роста электрического поля в центре каверны и уменьшения ее размеров с большой точностью описываются авторемодельными зависимостями для двумерного случая

спектра ленгмюровской турбулентности в инерционном интервале

$$W_k \sim 1 / k^{5/2}. \quad (1.239)$$

При больших  $k$  схлопывание каверн останавливается за счет затухания Ландау плазменных колебаний. Для определения границ инерционного интервала сравним декремент затухания с инкрементом, определяющим скорость схлопывания каверн. На начальной стадии схлопывания этот инкремент совпадает с инкрементом (1.231) модуляционной неустойчивости. В дальнейшем схлопывание происходит, как мы уже знаем, с нарастающей скоростью, и к концу процесса схлопывания, когда может стать существенным

поглощение, соответствующий инкремент возрастает в  $t_0/t_0 - t \sim (k_*/k_0)^{3/2}$  раз,  $k_*$  и  $k_0$  — волновые числа соответственно в области поглощения и в области источника, где образуются каверны. Таким путем из условия

$$\gamma_L/\omega_p \sim (k_*/k_0)^{3/2} [(m_e/m_i) \langle E^2 \rangle / 16\pi n_0 T]^{1/2}$$

находим, что затухание Ландау становится существенным при волновых числах

$$k_* \approx (1/3 \div 1/4) r_D^{-1}. \quad (1.240)$$

Это и есть обратные масштабы длин волн в области поглощения ленгмюровской турбулентности.

### § 1.20. Стационарные нелинейные волны

Не следует думать, что волны в плазме можно «довести» до нелинейного уровня только из-за наличия неустойчивостей. Большой раздел в физике плазмы составляет изучение регулярных нелинейных волн, возникающих в результате каких-либо упорядоченных механизмов, аналогичных, например, механизму генерации ударных волн в обычной газодинамике движущимся поршнем. Ведь так же, как и в газовой динамике, для волн с линейным законом дисперсии должны происходить хорошо известное укрупнение и опрокидывание фронта. Эта

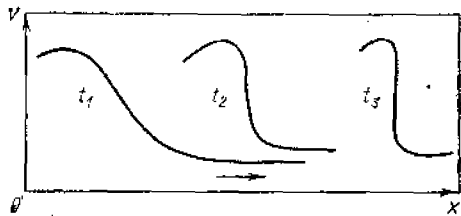


Рис. 1.39. Нелинейное укрупнение фронта волны

нелинейная деформация профиля волны (рис. 1.39) заключается в том, что участки профиля, которым соответствуют большие скорости, стремятся опередить участки с меньшей скоростью, и в конце концов образуется разрыв. Если в газовой динамике рост крутизны фронта ограничивался диссипативными эффектами, то в плазме главную роль могут играть эффекты дисперсии, т. е. зависимости фазовой скорости от длины волны. Роль дисперсии в ограничении нелинейного укрупнения профиля можно пояснить следующим образом. Увеличение крутизны переднего фронта означает рождение высших гармоник в волне под влиянием нелинейности. В первом (линейном) приближении по амплитуде всякая волна остается гармонической в форме  $\exp\{ikx - i\omega t\}$ . Во втором приближении тот же механизм, который был описан в § 1.14 и приводил к параметрической связи различных типов волн, в случае монохроматической волны приводит просто к рождению второй гармоники. Разлагая по амплитуде волны, получаем следующее уравнение для поправки второго при-



ближения:

$$(\partial^2/\partial t^2 - v_\phi^2 \partial^2/\partial x^2) E_2 + \hat{L}E_2 = AE_1 \exp \{2i(kx - \omega t)\}. \quad (1.241)$$

Здесь  $E$  — электрическое поле волны, индексы 1 и 2 соответствуют амплитудам первой и второй гармоник, оператор  $\hat{L}$  описывает отклонение от линейного закона дисперсии волны  $\omega = v_\phi k$ . В известном смысле уравнение (1.241) имеет вид уравнения движения «осциллятора» под действием вынуждающей силы, пропорциональной  $E_1$ . Ясно, что вторая гармоника может эффективно возбуждаться только тогда, когда эта сила находится в резонансе с собственной частотой осциллятора, т. е. если удвоенной исходной частоте  $2\omega$  соответствует (в законе дисперсии) волновое число  $2k$ . Такой резонанс может осуществляться лишь для линейного закона дисперсии  $\omega = v_\phi k$ , дисперсия фазовой скорости означает, что вынуждающая сила смещается из резонанса и перекачка во вторую гармонику становится менее эффективной.

Для того чтобы увидеть, как дисперсия остановит процесс нелинейного укручения профиля, рассмотрим случай, когда фазовая скорость уменьшается с ростом волнового числа. Тогда нелинейная добавка к фазовой скорости и дисперсионная добавка, появляющаяся при укручении профиля, имеют разный знак и поэтому могут компенсировать друг друга. Такой закон дисперсии имеют ленгмюровские и коротковолновые ионно-звуковые колебания, и в этих случаях следует ожидать появления нелинейных стационарных волн. В таких волнах все величины зависят от комбинации  $x - v_\phi t$  ( $v_\phi$  — скорость распространения волны). Эти волны можно рассматривать как асимптотическое состояние исходного волнового пакета при достаточно больших временах, когда эффекты нелинейного укручения и дисперсии успевают стабилизировать друг друга.

Рассмотрим сначала нелинейную ленгмюровскую волну. Напомним, что для волны достаточно большой амплитуды, когда выполнено условие  $\gamma_L \tau_b < 1$  ( $\gamma_L$  — линейный инкремент,  $\tau_b$  — период колебаний захваченных частиц), фазовое размешивание полностью «выключает» кинетический эффект взаимодействия резонансных частиц с волной. Поэтому нелинейную волну можно исследовать с помощью более простых гидродинамических уравнений (1.100) и (1.102), дополненных уравнением Пуассона:

$$\left. \begin{aligned} \partial v / \partial t + v \partial v / \partial x &= (e/m) (\partial \varphi / \partial x); \\ \partial n / \partial t + \partial (nv) / \partial x &= 0; \\ \partial^2 \varphi / \partial x^2 &= 4\pi e (n - n_0). \end{aligned} \right\} \quad (1.242)$$

Полагая, что  $n = n(\xi)$ ,  $v = v(\xi)$ ,  $\varphi = \varphi(\xi)$ ,  $\xi = x - v_\phi t$ , можно проинтегрировать первые два уравнения из приведенной системы:

$$\left. \begin{aligned} v &= v_\phi - (v_\phi^2 + 2e\varphi/m)^{1/2}; \\ n &= -n_0 v_\phi / (v - v_\phi). \end{aligned} \right\} \quad (1.243)$$

Постоянные интегрирования в этих уравнениях выбраны из условия, что в невозмущенном состоянии, т. е. при  $\varphi=0$ ,  $v=0$ ,  $n=n_0$ . Используя эти соотношения, можно свести уравнение Пуассона к следующему уравнению для  $\varphi(\xi)$ :

$$d^2\varphi/d\xi^2 = -\partial U/\partial\varphi, \quad (1.244)$$

где  $U(\varphi) = -4\pi en_0 \{ m v_\varphi (v_\varphi^2 + 2e\varphi/m)^{1/2} / e - \varphi - m v_\varphi^2 / e \}$ .

При решении уравнения (1.244) оказывается удобным использовать формальную аналогию с аналитической механикой — это уравнение совпадает с уравнением движения частицы в нелинейной потенциальной яме  $U(\varphi)$  (рис. 1.40) (эта аналогия становится очевидной при замене  $\xi \rightarrow t$ ,  $\varphi \rightarrow x$ ).

Первый интеграл уравнения (1.244) совпадает с интегралом энергии частицы с единичной массой и полной энергией  $\mathcal{E}$ :

$$(1/2)(d\varphi/d\xi)^2 = \mathcal{E} - U(\varphi). \quad (1.245)$$

Уравнение энергии (1.245) просто интегрируется, и решение  $\varphi(\xi)$  выражается через эллиптические функции. Нет смысла приводить соответствующие формулы вследствие их громоздкости. Качественно характер решения нетрудно пояснить, используя вид эффективного «потенциала»  $U(\varphi)$ . При ма-

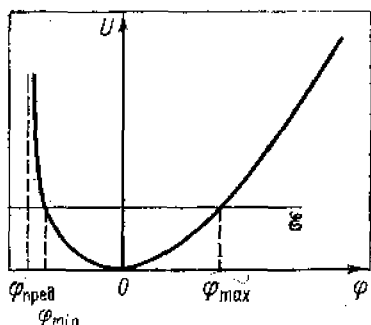


Рис. 1.40. График эффективной потенциальной энергии  $U(\varphi)$  в случае нелинейной ленгмюровской волны

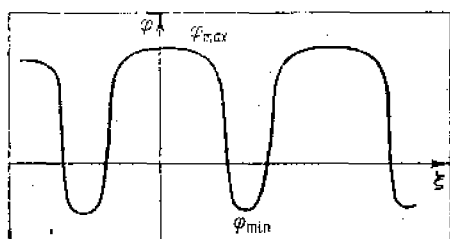


Рис. 1.41. Профиль потенциала электрического поля нелинейной ленгмюровской волны

лых амплитудах  $\varphi(\xi)$  — гармоническая функция, при больших амплитудах потенциал  $\varphi$  остается периодической функцией, изменяющейся от  $\varphi_{\max}$  до  $\varphi_{\min}$ , однако профиль волны искажается, как это показано на рис. 1.41. При  $\varphi < 0$  отрицательная сила  $-U'(\varphi)$ , действующая на «осциллятор» в потенциальной яме, велика, и эту область значений  $\varphi$  осциллятор проскакивает довольно быстро, существенно быстрее области положительных  $\varphi$ . В результате мы получаем так называемую кноидальную волну для потенциала (см. рис. 1.41), которой соответствует волна электрического поля  $E(\xi)$  с достаточно крутым передним фронтом.

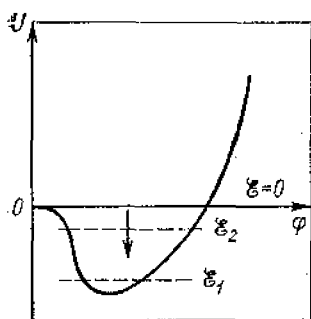


Рис. 1.42. График  $U(\varphi)$  для нелинейной ионно-звуковой волны

Нелинейное укрупнение профиля волн в рассматриваемом случае остановлено в результате дисперсии, а обмен энергии с резонансными частицами полностью «выключен» из-за фазового размешивания этих частиц. Предельное значение амплитуды потенциала в этой волне  $\Phi_{\text{пред}} \approx -mv_{\phi}^2/2e$ , как это следует из вида потенциальной ямы  $U(\varphi)$ . Возникновение такого ограничения потенциала можно объяснить так. В области отрицательных  $\varphi$  (см. рис. 1.40) профиль потенциала представляет собой потенциальный горб для электронов. При достаточно большой высоте горба  $\Phi_{\text{min}} = \Phi_{\text{пред}}$  тепловые

частицы плазмы не могут переваливать через него и останавливаются в системе отсчета волны. При еще больших амплитудах появляются отраженные электроны, возникает многопоточковое движение частиц, приводящее к опрокидыванию профиля волны. Таким образом, в плазменной волне дисперсионные эффекты останавливают процесс нелинейного укрупнения и опрокидывания волнового профиля только для волны не слишком большой амплитуды:

$$|\Phi_{\text{min}}| \leq mv_{\phi}^2/2e.$$

Рассмотрим теперь другой предельный случай — нелинейную ионно-звуковую волну. Фазовая скорость ионно-звуковой волны существенно больше тепловой скорости ионов, поэтому движение ионов в волне можно рассматривать с помощью гидродинамических уравнений. Скорость и плотность ионов определяются тогда формулами (1.243) с соответствующими заменами заряда и массы заряженной частицы  $e \rightarrow -e$ ,  $m_e \rightarrow m_i$ . Что же касается электронов, то, как уже отмечалось ранее (см. § 1.10), тепловая скорость электронов существенно больше фазовой скорости волны, и поэтому для них поле волны практически квазистационарно. В этом случае для электронов простейшей моделью является распределение Больцмана (1.116). Тогда уравнение Пуассона для потенциала ионно-звуковой волны вновь сводится к уравнению движения нелинейного осциллятора [см. уравнение (1.244)]. Эффективная «потенциальная яма»  $U(\varphi)$  в этом случае имеет вид

$$U(\varphi) = -4\pi n_0 e \{ m_i v_{\phi} (v_{\phi}^2 - 2e\varphi/m_i)^{1/2} + T_e \exp(e\varphi/T_e) - mv_{\phi}^2 - T_e \}. \quad (1.246)$$

График функции  $U(\varphi)$  показан на рис. 1.42. Так же, как и в случае ленгмюровской волны, ограничимся качественным анализом решения, основывающимся на интеграле «энергии» (1.245). Из вида графика  $U(\varphi)$  следует, что в случае сверхзвуковой волны  $v_{\phi} > (T_e/m_i)^{1/2}$  значениям  $\mathcal{E}$  в интервале  $\mathcal{E}_{\text{min}} < \mathcal{E} < 0$  соответствуют

периодические решения с  $\varphi > 0$ , т. е. являющиеся потенциальными горбами для ионов. При  $\mathcal{E} = \mathcal{E}_{\min}$  (т. е. вблизи дна «ям») имеем гармонические колебания потенциала малой амплитуды относительно среднего значения  $\varphi^*$  (рис. 1.43). С ростом значения  $\mathcal{E}$  происходит нелинейное искажение профиля волны. Вершины в волне потенциала разносятся на все большее расстояние, поскольку при этом вблизи точки поворота  $\varphi \approx \varphi_{\min}$  сила, действующая на нелинейный «осциллятор» и пропорциональная  $\partial U(\varphi)/\partial \varphi$ , оказыва-

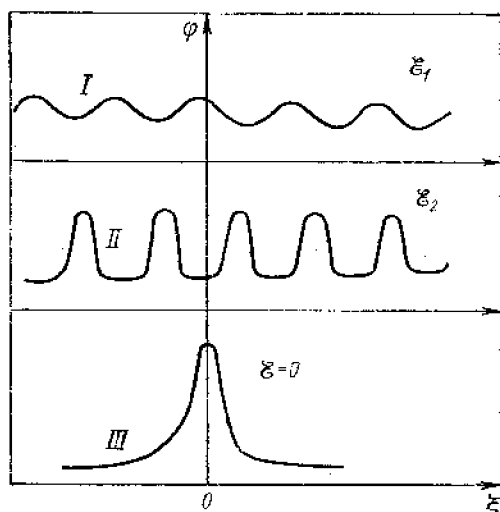


Рис. 1.43. Профиль потенциала нелинейной ионно-звуковой волны при различных уровнях энергии осциллятора в эффективной потенциальной яме  $U$  (см. рис. 1.42): I — синусоидальная волна малой амплитуды; II — нелинейная кноидальная волна; III — уединенная волна — солитон

ется малой. В результате получаем кноидальную волну (см. рис. 1.43). Наконец, при  $\mathcal{E} \rightarrow 0$  вершины  $\varphi(\xi)$  разносятся на бесконечно большое расстояние, и мы имеем уединенную волну, или солитон. В такой волне при  $\xi \rightarrow \pm\infty$ ,  $\varphi \rightarrow 0$  и  $d\varphi/d\xi \rightarrow 0$  (см. рис. 1.43).

Полагая в интеграле «энергии»  $\mathcal{E} = 0$  и  $d\varphi/d\xi = 0$  при  $\varphi = \varphi_{\max}$ , что эквивалентно условию  $U(\varphi_{\max}) = 0$ , получаем дисперсионное соотношение для солитона, устанавливающее связь между скоростью его распространения и амплитудой потенциала в нем:

$$v^2 = (T_e/2m_i) [\exp(e\varphi_{\max}/T_e) - 1]^2 / [\exp(e\varphi_{\max}/T_e) - 1 - e\varphi_{\max}/T_e]. \quad (1.247)$$

Так же, как и в ленгмюровской волне, в нелинейной звуковой волне существует предельное значение амплитуды потенциала, при превышении которого происходит отражение ионов от горба потенциала, приводящее к возникновению многопоточкового движения ионов и к опрокидыванию волнового профиля. Из вида функции  $U(\varphi)$  в рассматриваемом случае [см. (1.246)] следует, что в ионно-звуковой волне предельное значение амплитуды потенциала

$$e\varphi_{\text{пред}} \approx Mv^2_{\phi}/2. \quad (1.248)$$

Воспользовавшись дисперсионным соотношением (1.247), нетрудно показать, что для солитона такая амплитуда соответствует критическому числу Маха  $M_{\text{пред}} = v_{\phi} / (T_e / m_i)^{1/2} \approx 1,6$ . Стационарный ионно-звуковой солитон возможен только при числах Маха  $M < M_{\text{пред}}$ , при больших числах Маха дисперсия не останавливает нелинейное укрупнение и опрокидывание волнового профиля.

Рассмотренная здесь уединенная волна — солитон представляет собой симметричный горб потенциала. Такая волна возможна только в отсутствие какой-либо диссипации, когда условия за фронтом волны повторяют условия перед ее фронтом, т. е. решение строго обратимо. Наличие диссипации приводит к нарушению симметрии и возникновению своеобразной ударной волны, связывающей два различных состояния плазмы: невозмущенное (перед фронтом) и модулированное интенсивными колебаниями (за фронтом). Структура ударной волны существенно зависит от конкретного механизма диссипации. Кроме чисто столкновительного затухания колебаний возможны также коллективные механизмы диссипации, связанная с ними ударная волна называется бесстолкновительной.

Рассмотрим, как происходит формирование бесстолкновительной ударной волны. Ограничимся случаем достаточно малых амплитуд волн, когда удастся построить ламинарную теорию. Будем считать, что обычная диссипация из-за парных столкновений частиц отсутствует, но примем во внимание эффект отражения ионов от переднего фронта, играющий роль бесстолкновительной диссипации. В построенной выше гидродинамической теории такое отражение вообще отсутствовало, если только амплитуды были не слишком велики:  $\phi < \phi_{\text{пред}} (M < 1,6)$ . Однако в действительности ионы имеют распределение по скоростям, и для небольшой группы резонансных с волной ионов эффект отражения возможен и при малых амплитудах волны. Если число отраженных ионов невелико, то можно найти форму профиля устанавливающейся в этих условиях ударной волны.

При учете отраженных ионов уравнение для потенциала (1.246) модифицируется таким образом, что

$$n_i \rightarrow n_i - n_{0f}(\phi_{\text{max}}) v_{\phi} / (v_{\phi}^2 - 2e\phi / m_i)^{1/2} + 2n_{0f}(\phi). \quad (1.249)$$

В этой формуле  $n_i$  — плотность ионов, проходящих над потенциальным горбом, которая определяется ранее полученной гидродинамической формулой. Из добавленных слагаемых первое соответствует вычитанию отраженных ионов из полного числа ионов  $n_0$ , второе представляет собой вклад в плотность отраженных ионов. Величина  $n_{0f}(\phi)$  есть полная плотность отраженных ионов в точке с потенциалом  $\phi$ . Коэффициент 2 перед последним членом в (1.249) возникает из-за наличия двух групп движущихся навстречу друг другу частиц. Конкретный вид  $f(\phi)$  легко найти, зная

невозмущенное распределение ионов по скоростям  $f_{0i}(v)$ :

$$n_i f(\varphi) = \int_{v_{\varphi} - (2e\varphi/m_i)^{1/2}}^{v_{\varphi} + (2e\varphi/m_i)^{1/2}} f_{0i} dv. \quad (1.250)$$

При добавлении в уравнение для потенциала слагаемого, пропорционального  $f(\varphi)$ , величина  $\mathcal{E}$  [«энергия» осциллятора в потенциальной яме  $U(\varphi)$ ] уже не является интегралом движения. Появление отраженных ионов приводит к уменьшению «энергии» осциллятора в эффективной яме, пропорциональному числу отраженных частиц:

$$\mathcal{E} = -8\pi en_0 \int_0^{\varphi} f(\varphi) d\varphi. \quad (1.251)$$

Теперь нетрудно понять, как можно сконструировать решение с профилем потенциала, показанным на рис. 1.44. Перед фронтом  $\mathcal{E} = 0$ , т. е. профиль потенциала такой же, как и в случае солитона.

В результате отражения  $\mathcal{E}$  уменьшается (перемещение  $\mathcal{E}$  в потенциальной яме  $U(\varphi)$  показано на рис. 1.42 стрелками). Поэтому за фронтом волны имеют место интенсивные упорядоченные колебания. Решение такого типа, в котором состояние плазмы меняется от первоначально невозмущенного (до прихода солитона) к состоянию, модулированному интенсивными колебаниями, и есть бесстолкновительная ударная волна.

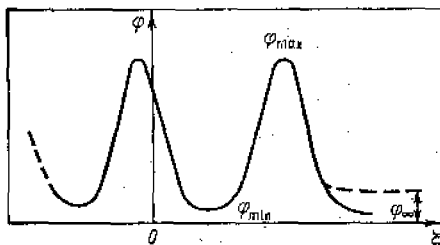


Рис. 1.44. Образование бесстолкновительной ударной волны

В отличие от обычной газовой динамики возмущенное состояние (за фронтом ударной волны) не является термодинамически равновесным, так как нет настоящих столкновений, устанавливающих его. Однако к бесстолкновительным ударным волнам можно применять соответствующие законы сохранения (а при переходе через фронт — соотношения Гюгоню), учитывая вклад колебательной структуры за фронтом.

Максимальное значение потенциала за фронтом волны  $\varphi_{\max}$  (см. рис. 1.44) мало отличается от соответствующего значения в уединенной волне с тем же числом Маха. Минимальное значение потенциала  $\varphi_{\min}$  («левая» точка поворота осциллятора на рис. 1.42) определяется условием  $\mathcal{E} - U(\varphi_{\min}) = 0$ , и поскольку при малых  $\varphi$  потенциальная энергия  $U(\varphi)$  меняется квадратично, точка поворота  $\varphi_{\min}$  оказывается пропорциональной корню квадратному из энергии  $-\mathcal{E}$  за фронтом, т. е. из полного числа отраженных

частиц:

$$\varphi_{\min} \sim (-\mathcal{E})^{1/2} \sim \left( \int_0^{\varphi_{\max}} f(\varphi) d\varphi \right)^{1/2}. \quad (1.252)$$

Период колебаний  $\varphi(\xi)$  за фронтом определяется интегралом

$$\lambda \sim \int_{\varphi_{\min}}^{\varphi_{\max}} d\varphi / (-U(\varphi) + \mathcal{E})^{1/2}.$$

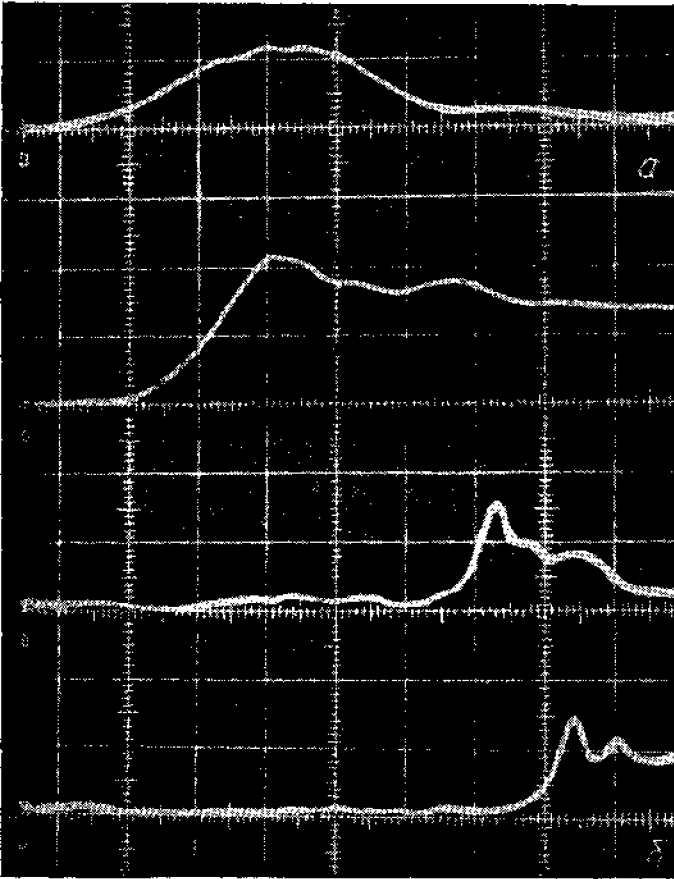


Рис. 1.45. Экспериментальное наблюдение укращения нелинейной неакустической волны (Алиханов С. Г., Белан В. Г., Сагдеев Р. З. «Письма ЖЭТФ», 1968, т. 7, с. 405): первоначальное возмущение плотности (амплитуда  $\Delta n/n \sim 1/5$ ) (а) и формирование нелинейной осцилляторной структуры по мере удаления от источника (б).

Очевидно, что этот период конечен и логарифмически зависит от энергии

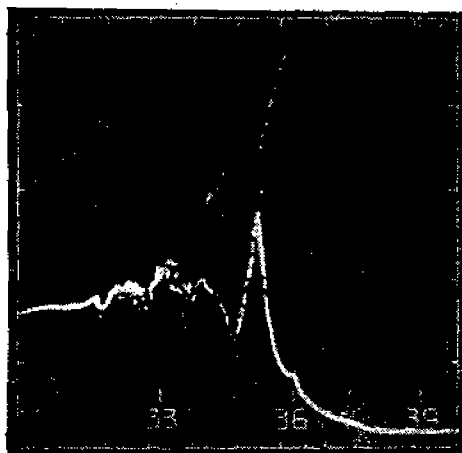
$$\lambda \sim \ln(1 - \mathcal{E}) \sim \ln(1/\Phi_{\min}). \quad (1.253)$$

Наконец, появление уходящих на бесконечность ионов приводит к скачку потенциала  $\Phi_{\infty}$ . Такой скачок пропорционален  $f$ , и при малом числе отраженных ионов  $\Phi_{\infty} \ll \Phi_{\min}$ .

При больших числах Маха, когда возникают многопоточковое движение ионов и опрокидывание волнового фронта, изложенная выше так называемая ламинарная теория бесстолкновительной ударной волны неприменима. В принципе может

Рис. 1.46. Опрокидывание пеллинейной ионно-звуковой волны при больших числах Маха в численном эксперименте (Алиханов С. Г., Сагдеев Р. З., Чиботаев П. З. «Журн. эксперим. и теор. физ.», 1969, т. 57, с. 1565).

Показана фазовая плоскость волны ( $\varphi, x$ ) после опрокидывания фронта волны. Видно появление вперед фронта ионно-звуковой волны, убегаящих вперед со скоростями  $\sim 2u$ . Наличие этих волн приводит к образованию подюжия на профиле потенциала (и плотности) в волне



возникнуть неустойчивость многопоточкового движения ионов типа рассмотренной в § 1.14 пучковой неустойчивости электронов. Неустойчивость подобного типа, как известно, переводит энергию упорядоченного движения в энергию хаотических турбулентных пульсаций. Связанная с неустойчивостью аномальная диссипация может в определенных условиях привести к формированию некоторого турбулентного слоя конечной толщины, играющего роль фронта турбулентной бесстолкновительной ударной волны.

Иллюстративные примеры генерации нелинейных ионно-звуковых волн приведены на рис. 1.45 (лабораторный эксперимент с плазмой низкой плотности) и на рис. 1.46 (одномерный численный эксперимент).



## 2

# ПЛАЗМА В МАГНИТНОМ ПОЛЕ

### § 2.1. Движение заряженных частиц в магнитном поле

Наиболее интересные и важные для различных приложений свойства плазмы обнаруживаются при анализе ее поведения в магнитном поле. Под действием магнитного поля плазма теряет изотропию и многие ее свойства радикально меняются. При наличии магнитного поля появляется возможность создать плазменные конфигурации, занимающие ограниченную часть пространства и, так сказать, подвешенные в вакууме. Это уже нечто совершенно не свойственное обычному газу. В этих условиях плазма приобретает некоторые новые свойства, отличающие ее от всех других состояний вещества.

Поскольку в конечном счете все характерные черты плазменных процессов обусловлены законами движения частиц, то прежде чем заняться магнитными свойствами плазмы как макроскопической субстанции, нужно проанализировать вопрос о влиянии магнитного поля на движение электронов и ионов.

Как известно, в однородном магнитном поле заряженная частица движется в общем случае по винтовой линии. Проекция траектории на плоскость, перпендикулярную к вектору магнитного поля  $\mathbf{H}$ , представляет собой окружность радиусом  $r_H = mv_{\perp} / eH$ , где  $v_{\perp}$  — поперечная составляющая скорости частицы. Это так называемая ларморовская окружность. Вращение по этой окружности происходит с ларморовской частотой  $\omega_H = eH / mc$ . Вдоль силовых линий частица движется с постоянной скоростью  $v_{\parallel}$ .

Рассмотрим теперь движение частицы в неоднородном магнитном поле. В физике плазмы мы обычно встречаемся только с таким уровнем неоднородности, при котором на расстоянии порядка ларморовского радиуса частиц вектор  $\mathbf{H}$  остается почти постоянным по величине и направлению: другими словами, в «микромасштабах» магнитное поле изменяется очень медленно. Выясним, какие изменения вносит слабая неоднородность поля в характер движения частиц. Допустим сначала, что напряженность магнитного поля изменяется вдоль силовой линии.

Наблюдая за траекторией частицы, которая навивается на эту силовую линию, можно установить, что форма траектории заметно меняется на протяжении отрезков, в пределах которых происходит существенное увеличение или уменьшение напряженности магнитного поля  $H$ . При движении в сторону возрастания поля траектория становится более крутой и она похожа на сжимающуюся пружину. Если же частица движется в сторону ослабевающего поля, то ее траектория становится более пологой.

Причину этого эффекта нетрудно обнаружить. Заряженная частица, вращающаяся по ларморовской окружности, создает кольцевой ток и, следовательно, эквивалентна элементарному диамагнетнику с магнитным моментом  $\mu = \omega_{\perp} / H$ , где  $\omega_{\perp}$  — кинетическая энергия поперечного движения. Действительно, согласно теореме Ампера магнитный момент кольцевого тока  $\mu = (j/c) \pi r^2 H$ ; величина электрического тока, соответствующая ларморовскому вращению,  $j = e \omega_{\perp} / 2\pi$ . Теперь, подставляя записанные выше выражения для  $\omega_{\perp}$  и  $r_H$ , получаем

$$\mu = m v_{\perp}^2 / 2H = \omega_{\perp} / H. \quad (2.1)$$

На диамагнетик, находящийся в неоднородном магнитном поле, действует сила  $F = -\mu \operatorname{grad} H$ . В частности, если  $\operatorname{grad} H$  направлен вдоль силовой линии, то

$$F = -\mu dH/dl, \quad (2.2)$$

где дифференцирование проводится вдоль направления поля. Под действием указанной силы скорость продольного движения изменяется по закону

$$m dv_{\parallel} / dt = -(\omega_{\perp} / H) (dH/dl). \quad (2.3)$$

Умножая обе части последнего равенства на  $v_{\parallel}$ , получаем

$$d\omega_{\parallel} / dt = -(\omega_{\perp} / H) (dH/dl) (dl/dt) = -(\omega_{\perp} / H) (dH/dt). \quad (2.4)$$

При движении в постоянном магнитном поле  $\omega_{\perp} + \omega_{\parallel} = \text{const}$ . Поэтому (2.4) можно преобразовать к виду

$$d\omega_{\perp} / dt = (\omega_{\perp} / H) (dH/dt). \quad (2.5)$$

Отсюда следует, что

$$d\omega_{\perp} / \omega_{\perp} = dH/H; \quad \omega_{\perp} / H = \text{const}. \quad (2.6)$$

Таким образом, при движении заряженной частицы в магнитном поле, напряженность которого достаточно плавно изменяется вдоль силовых линий, отношение  $\omega_{\perp} / H$  не меняется, а следовательно, остается постоянным и магнитный момент, связанный с ларморовским вращением. Сохранение величины  $\omega_{\perp} / H$  имеет более общий и глубокий смысл — оно представляет собой проявление принципа адиабатической инвариантности при квазипериодическом движении. Связь с этим принципом разобрана в § 2.3.

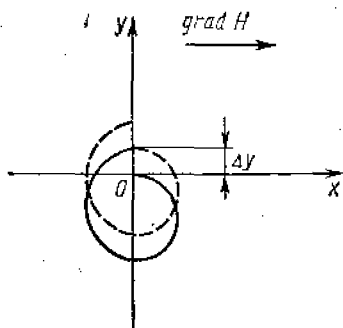


Рис. 2.1. Дрейф частиц в неоднородном магнитном поле

Рассмотрим теперь движение частиц в неоднородном поле, напряженность которого изменяется в направлении, перпендикулярном к силовым линиям. Остановимся сначала на простейшем случае, когда скорость перпендикулярна к магнитному полю. Траектория частицы изображена на рис. 2.1. Магнитное поле направлено перпендикулярно к плоскости чертежа. Напряженность поля увеличивается в сторону возрастания координаты  $x$ . В этом случае траектория частицы в плоскости  $xu$  уже не будет представлять собой окружность, так как величина ларморовского радиуса справа будет меньше, чем слева. Очевидно, что траектория не замыкается после одного полного оборота. При каждом обороте частица описывает петлю и передвигается на некоторое расстояние  $\Delta y$  вдоль оси  $y$ , т. е. перпендикулярно к градиенту магнитного поля. После нескольких оборотов траектория обрисовывается достаточно ясно. Она будет представлять собой дорожку, сплетенную из петель, по которой частица движется вдоль направления, параллельного оси  $y$ .

Такое движение называется магнитным дрейфом. Скорость дрейфового движения частицы вдоль дорожки мала по сравнению со скоростью ее ларморовского вращения (по условию предполагается, что напряженность поля слабо изменяется на расстоянии масштаба ларморовского радиуса).

Обратим внимание на одну особенность дрейфового движения в неоднородном магнитном поле. Совершая его, частица не уходит в область более сильного или более слабого поля. Напротив, частица движется по узкой дорожке таким образом, что в пределах ее траектории напряженность поля сохраняет одно и то же значение. Это означает, что адиабатическая инвариантность  $H$  имеет место также и при магнитном дрейфе. В неоднородном магнитном поле дрейфовое движение может быть связано также с наличием у частицы продольной скорости  $v_{||}$ . Механизм возникновения такого дрейфа можно понять, рассмотрев рис. 2.2. На этом рисунке жирными линиями показаны силовые линии неоднородного магнитного поля. В общем случае они являются криволинейными. В точке  $M_1$ , где скорость частицы параллельна вектору  $\mathbf{H}$ , сила Лоренца равна нулю. Однако при дальнейшем движении частица по инерции соскользнет с силовой линии, и это приведет к тому, что в точке  $M_2$  у частицы появится небольшая слагающая скорости, перпендикулярная к магнитному полю. С появлением поперечной скорости будет автоматически связано появление силы Лоренца. Под действием этой силы частица приобретает дрейфо-

вую скорость, которая направлена перпендикулярно к плоскости рисунка.

Рассматривая частные случаи (например, движение частиц в магнитном поле, создаваемом прямолинейным проводником с током), нетрудно убедиться, что дрейф частицы, связанный с продольной скоростью  $v_{\parallel}$ , происходит в том же направлении, в котором совершается дрейфовое движение, обусловленное наличием у частицы поперечной скорости  $v_{\perp}$ .

Дрейфовое движение возникает не только при неоднородности магнитного поля, но также и тогда, когда на заряженную частицу в однородном магнитном поле действует дополнительная сила немагнитного происхождения (например, со стороны электрического или гравитационного поля), направленная перпендикулярно к вектору  $\mathbf{H}$ .

Для выяснения основных закономерностей дрейфового движения рассмотрим следующую задачу. Частица с зарядом  $e$  и массой  $m$  движется в однородном магнитном поле, направленном по оси  $z$ , при наличии дополнительной силы  $F$ , направленной вдоль оси  $y$ .

Величину  $E$  будем считать медленно изменяющейся функцией времени (ее можно рассматривать так же, как функцию  $z$ , поскольку слагающая скорости частицы вдоль линий магнитного поля остается постоянной и поэтому  $z = v_{\parallel} t$ ). Условие медленности изменения означает, что  $F$  остается почти постоянной за время одного ларморовского оборота частицы, т. е.  $(2\pi/\omega_H) |F/F| \ll 1$ .

Запишем уравнения движения частицы:

$$\ddot{x} = \omega_H \dot{y}; \quad (2.7)$$

$$\ddot{y} = -\omega_H \dot{x} + F(t)/m. \quad (2.8)$$

Выберем следующие начальные условия:  $x(0) = 0$ ;  $y(0) = 0$ ;  $\dot{x}(0) = 0$ ;  $\dot{y}(0) = v_0$ . При указанных условиях

$$\dot{x} = \omega_H y, \quad (2.9)$$

$$\ddot{y} = -\omega_H^2 y + F(t)/m. \quad (2.10)$$

Общее решение уравнения (2.10) имеет вид

$$y = A \sin \omega_H t + B \cos \omega_H t + \frac{1}{\omega_H} \int_0^t (F(u)/m) \sin [\omega_H(t-u)] du, \quad (2.11)$$

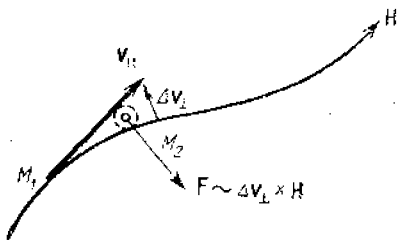


Рис. 2.2 Происхождение центробежного дрейфа

где  $A$  и  $B$  — константы интегрирования. Поскольку  $y(0) = 0$ , нужно положить  $B = 0$ . Преобразуя интеграл, получаем

$$y = A \sin \omega_H t + \frac{1}{m\omega_H^2} [F(t) - F(0) \cos \omega_H t] - \frac{1}{m\omega_H^2} \int_0^t \dot{F}(u) \cos \omega_H (t-u) du. \quad (2.12)$$

Дифференцируя (2.12), находим

$$y = A\omega_H \cos \omega_H t + (F(0)/m\omega_H) \sin \omega_H t + (1/m\omega_H) \int_0^t \dot{F}(u) \sin \omega_H (t-u) du. \quad (2.13)$$

При принятом предположении о медленном изменении  $F$  последний член выражения (2.12) пренебрежимо мал по сравнению со вторым. Действительно,

$$\left| \int_0^t \dot{F}(u) \cos \omega_H (t-u) du \right| \sim (1/\omega_H) |\dot{F}|,$$

и, следовательно, отношение третьего члена ко второму порядка  $(1/\omega_H) |\dot{F}/F|$ . Точно так же можно пренебречь последним членом в выражении для  $y$ . Принимая во внимание начальные условия, из (2.9) и (2.12) получаем следующие соотношения:

$$x = \omega_H \int_0^t y dt = \frac{v_0}{\omega_H} (1 - \cos \omega_H t) - (F(0)/m\omega_H^2) \sin \omega_H t + (1/m\omega_H) \int_0^t F(t) dt; \quad (2.14)$$

$$y = (v_0/\omega_H) \sin \omega_H t - (F(0)/m\omega_H^2) \cos \omega_H t + F(t)/m\omega_H. \quad (2.15)$$

Выражения для компонент скорости частицы имеют вид

$$\dot{x} = v_0 \sin \omega_H t - (F(0)/m\omega_H) \cos \omega_H t + F(t)/m\omega_H; \quad (2.16)$$

$$\dot{y} = v_0 \cos \omega_H t + (F(0)/m\omega_H) \sin \omega_H t. \quad (2.17)$$

Малые члены в (2.14) — (2.17) отброшены.

Полученные формулы нетрудно интерпретировать. Мы видим, что движение частицы в однородном магнитном поле при наличии медленно меняющейся дополнительной силы  $\mathbf{F} \perp \mathbf{H}$  представляет собой суперпозицию равномерного вращательного движения с угловой скоростью  $\omega_H$  и перемещения в направлении, параллельном  $[\mathbf{F} \times \mathbf{H}]$ , с дрейфовой скоростью

$$u_d = F(t)/m\omega_H = cF(t)/eH. \quad (2.18)$$

Линейная скорость вращательного движения остается в этом случае неизменной. При заданных начальных условиях

$$v_{\perp} = \sqrt{v_0^2 + F^2(0)/m^2\omega_H^2}. \quad (2.19)$$

Постоянство  $v_{\perp}$  связано с адиабатической инвариантностью отношения  $v_{\perp}^2/H$ . Центр ларморовской окружности перемещается с дрейфовой скоростью вдоль оси  $x$ . При этом его координата медленно изменяется:

$$y_c = F(t)/m\omega_H^2. \quad (2.20)$$

Перейдем к анализу конкретных случаев дрейфового движения. Если частица движется перпендикулярно к силовым линиям неоднородного магнитного поля, то влияние неоднородности можно заменить действием дополнительной силы:

$$\mathbf{F} = -\mu \text{grad } H = (-w_{\perp}/H) \text{grad } H. \quad (2.21)$$

Дрейфовое движение будет связано с компонентой  $\mathbf{F}$  в направлении, перпендикулярном к  $\mathbf{H}$ . Из (2.18) и (2.21) находим дрейфовую скорость для рассматриваемого случая:

$$u_d = (mv_{\perp}^2 c/2eH^2) \text{grad}_{\perp} H, \quad (2.22)$$

где  $\text{grad}_{\perp} H$  обозначает компоненту  $\text{grad } H$  по направлению, перпендикулярному к  $\mathbf{H}$ . Дрейфовая скорость направлена параллельно  $[\mathbf{H} \times \text{grad } H]$ . Если движение происходит в области, где  $\text{rot } \mathbf{H} = 0$ , то формулу (2.22) можно привести к более простому виду. При наличии компоненты  $\text{grad } H$  в направлении, перпендикулярном к  $\mathbf{H}$ , силовые линии безвихревого магнитного поля должны быть криволинейными. Для того чтобы связать величину  $\text{grad}_{\perp} H$  с геометрией силовых линий,

рассмотрим рис. 2.3, на котором изображены два небольших участка силовых линий в плоскости кривизны (для простоты предполагаем, что мы имеем дело с семейством плоских кривых). Точка  $O$  — центр кривизны для силовой линии 1. Интеграл по контуру  $abcd$  равен  $H_2 dl_2 - H_1 dl_1$ , где  $dl_1$  и  $dl_2$  — длина отрезков силовых линий. В безвихревом случае этот интеграл обращается в нуль. Следовательно,

$$H_2 dl_2 = H_1 dl_1, \quad (2.23)$$

но

$$dl_2 = dl_1 \left[ \frac{(R + \delta n)}{R} \right] = dl_1 [1 + (\delta n/R)] \quad (2.24)$$

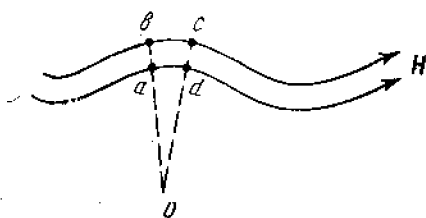


Рис. 2.3. Связь между кривизной силовых линий и неоднородностью магнитного поля

$$\Pi_{\perp} = \Pi_{\parallel} - \text{grad} H \, d\tau / d\sigma. \quad (2.25)$$

Подставив в (2.25) значения  $d\tau/d\sigma$  и  $\Pi_{\parallel}$  из (2.22), получаем следующую зависимость дрейфовых скоростей  $g$  от  $H$  и радиуса кривизны  $R$  магнитной поверхности  $R$ :

$$g = H \text{grad} H / \omega_p R. \quad (2.26)$$

В случае, когда  $\omega_p \ll \omega_c$  ( $\omega_c = eH/mc$ ) — частота циклотронного вращения — справедливо соотношение (2.26). При этом формула (2.26) может быть записана в виде

$$g = \frac{1}{2} \omega_p \nabla_{\perp}^2 H = \frac{1}{2} \nabla_{\perp}^2 V. \quad (2.27)$$

Эта формула имеет вид теоремы Пелле [10], которая справедлива для плазмы с произвольными частотами  $\omega_p$  и  $\omega_c$ .

$$g = \frac{1}{2} \omega_p R. \quad (2.28)$$

Скорость дрейфа  $g$  направлена перпендикулярно к вектору  $\text{grad} H$  и имеет тот же общий характер, что и вектор  $\text{grad} H$  (рис. 1). Как уже говорилось, вид дрейфа линии тока зависит от кривизны силовой линии: возникает дрейф, при котором служит инерционным эффектом. Если от кривизны силовой линии перейти к движению в системе координат, в которой дрейфовая скорость равна нулю, то необходимо учесть действие дробящей силы

$$F = m\omega_p^2 R, \quad (2.29)$$

направленной перпендикулярно к силовой линии. Согласно (2.18) эта сила вызывает дрейфовую скорость

$$u = -c^2 / \omega_p R, \quad (2.30)$$

направленную параллельно вектору  $[\mathbf{H} / \text{grad} H]$ . В общем случае дрейфовая скорость  $u$  есть сумма дрейфовых скоростей в поле радиальной суммы вращений (2.28) и (2.30):

$$u = \frac{c^2}{\omega_p R} \left( \frac{1}{2} \nabla_{\perp}^2 H + \frac{1}{R} \right). \quad (2.31)$$

Заметим, что независимо от ориентации вращенных элементов дрейфовый дрейф имеет произвольных направлений.

В общем случае движение заряженной частицы в неоднородном поле можно представить как суперпозицию следующих движений.

1. Вращения по ларморовской окружности со скоростью  $\omega_p$ , которая является производной от  $\omega_p = \frac{1}{2} \nabla_{\perp}^2 H$ .
2. Движения центра ларморовской окружности вдоль силовой линии со скоростью  $c$  (при этом  $\frac{c}{\omega_p} \ll \frac{1}{\omega_c} \ll \frac{1}{\omega_p}$  — const).
3. Дрейфового движения центра ларморовской окружности со скоростью  $u$ , определяемой уравнением (2.31).

Соединив упомянутых положения дугами параболы, находим осьвую линию траектории, которую можно рассматривать как череду плавных поворотов.

Выясним теперь, как произойдет дрейф при наличии электрического поля. Пусть на участке  $l_1$   $E$  и  $H$  выключены, а на участке  $l_2$   $E$  и  $H$  включены. Тогда на участке  $l_1$   $v_x = 0$ ,  $v_y = v_0$ ,  $v_z = 0$ , а на участке  $l_2$   $v_x = 0$ ,  $v_y = v_0 + \Delta v$ ,  $v_z = 0$ . В первом случае  $\mathbf{E} = E_0 \mathbf{e}_z$ ,  $\mathbf{H} = H_0 \mathbf{e}_x$ , а во втором  $\mathbf{E} = E_0 \mathbf{e}_z + E_1 \mathbf{e}_y$ ,  $\mathbf{H} = H_0 \mathbf{e}_x$ . Тогда дрейфовые скорости  $v_{dr}$  на участках  $l_1$  и  $l_2$  имеют значения  $v_{dr1} = 0$  и  $v_{dr2} = (c/4\pi e H_0) E_1$ . Пусть дрейфовые скорости на участках  $l_1$  и  $l_2$  отличаются на  $\Delta v_{dr}$ . Тогда дрейфовая скорость  $v_{dr}$  на участке  $l_2$  будет отличаться от дрейфовой скорости на участке  $l_1$  на  $\Delta v_{dr}$ . В результате за время от  $t = t_1$  до  $t = t_2$  эта скорость со скоростью  $(c/20) \Delta v_{dr}$  соед-

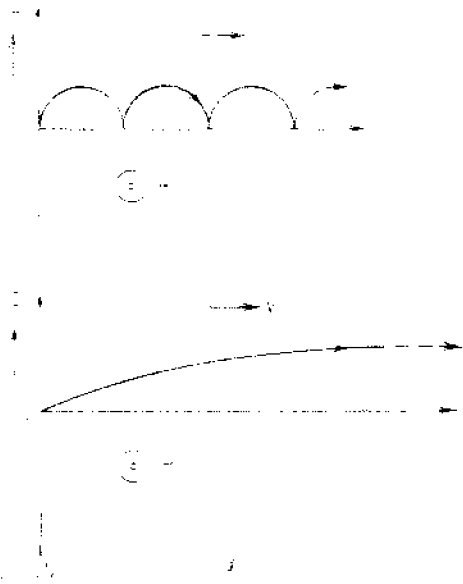


Рис. 2.4. Дрейфовая скорость частицы в магнитном поле  $H_0$  и электрическом поле  $E$ .  $v_{dr}$  — дрейфовая скорость частицы в магнитном поле  $H_0$  и электрическом поле  $E$ .

$$\Delta v_{dr} = (c/4\pi e H_0) [E(t_2) - E(t_1)].$$

Воспользуемся этой формулой в дальнейшем при анализе диалектрических свойств плазмы в магнитных полях.

На примере движения частицы в скрещенных полях наглядно иллюстрируются различия в характере движения при быстрых и медленных изменениях силы, вызывающей дрейф. Пусть в момент времени  $t = 0$  частица покоится в начале координат (оси  $x$  и  $y$  выбраны как и ранее, рис. 2.4). Допустим, что  $E(0) = 0$  и напряженность электрического поля очень медленно нарастает до некоторого предельного значения  $E$ . При  $v_y = 0$  и  $E(0) = eE(0) = 0$  траектория частицы изображается плавной кривой (рис. 2.4б). Значение  $\Delta v_{dr}$  монотонно нарастает от 0 до  $eE/m\omega^2 n$ . Если же при  $t = 0$  напряженность электрического поля скачком ( $\omega n t \ll 1$ ) нарастает до предельного значения  $E$ , то с помощью общих формул (2.14) и (2.15) нетрудно установить, что траектория частицы будет представлять собой плавную дугу (рис. 2.4а). Дрейфовые скорости в обоих случаях при быстрых  $t$  оказываются одинаковыми, однако во

\* За счет того, что, в больших перекрестках в начальной части кривой доминирует индукционный магнитный эффект, который не учтен в формулах (2.13) и (2.15).



и

$$H_2 = H_1 + (dH/dn) \delta n. \quad (2.25)$$

Подставляя выражения для  $dl_2$  и  $H_2$  в (2.22), получаем следующее соотношение, связывающее проекцию  $\text{grad } H$  на направление нормали к силовой линии с величиной  $R$ :

$$-(1/H) (dH/dn) = 1/R. \quad (2.26)$$

В рассматриваемом частном случае (плоские силовые линии) очевидно, что  $\text{grad}_\perp H = dH/dn$ . Поэтому формулу (2.26) можно записать в виде

$$(1/H) \text{grad}_\perp H = 1/R. \quad (2.27)$$

Для вычисления  $u_d$  можно теперь использовать следующую формулу:

$$u_d = v_\perp^2 / 2\omega_H R. \quad (2.28)$$

Строгий расчет показывает, что она остается справедливой в самом общем случае, если только неоднородность поля достаточно мала (в смысле, указанном ранее). Как уже говорилось выше, при движении вдоль кривой силовой линии возникает дрейф, причиной которого служит инерционный эффект. Если от криволинейного движения перейти к движению в системе координат, в которой продольная скорость равна нулю, то необходимо учесть действие центробежной силы

$$F = m\omega_\parallel^2 / R, \quad (2.29)$$

направленной перпендикулярно к силовой линии. Согласно (2.18) эта сила вызывает дрейфовое движение со скоростью

$$u_d = v_\parallel^2 / \omega_H R, \quad (2.30)$$

направленной параллельно вектору  $[\mathbf{H} \times \text{grad } H]$ . В общем случае дрейфовая скорость частицы в неоднородном магнитном поле равна сумме выражений (2.28) и (2.30):

$$u_d = \frac{1}{\omega_H R} \left( \frac{v_\perp^2}{2} + v_\parallel^2 \right). \quad (2.31)$$

Заметим, что положительно и отрицательно заряженные частицы дрейфуют в противоположных направлениях.

В общем случае движение заряженной частицы в неоднородном поле можно представить как суперпозицию следующих движений.

1. Вращения по ларморовской окружности со скоростью  $v_\perp$ , которая изменяется пропорционально  $\sqrt{H}$ .

2. Движения центра ларморовской окружности вдоль силовой линии со скоростью  $v_\parallel$  (при этом  $v_\perp^2 + v_\parallel^2 = \text{const}$ ).

3. Дрейфового движения центра ларморовской окружности со скоростью  $u_d$ , определяемой уравнением (2.31).

Соединяя мгновенные положения центров ларморовского вращения, находим осевую линию траекторий, которую можно рассматривать как усредненный путь частицы.

Выясним теперь, как происходит дрейф при наличии электрического поля. Если на частицу, находящуюся в однородном магнитном поле, действует также электрическое поле  $E$ , направленное перпендикулярно к  $H$  (скрещенные поля), то  $F = eE$  и, следовательно,  $u_d = cE/H$ . В этом случае дрейфовая скорость не зависит ни от заряда, ни от массы частицы. Она направлена параллельно  $[E \times H]$ . Центр ларморовской окружности, по которой вращается частица, смещается в сторону электрического поля. В интервале времени от  $t=t_1$  до  $t=t_2$  это смещение согласно (2.20) составляет

$$\Delta y = (e/m\omega^2 H) [E(t_2) - E(t_1)].$$

Воспользуемся этой формулой в дальнейшем при анализе диэлектрических свойств плазмы в магнитных полях.

На примере движения частицы в скрещенных полях наглядно иллюстрируются различия в характере движения при быстрых и медленных изменениях силы, вызывающей дрейф. Пусть в момент времени  $t=0$  частица покоится в начале координат (оси  $x$  и  $y$  выбираются, как и ранее, рис. 2.4). Допустим, что  $E(0)=0$  и напряженность электрического поля очень медленно нарастает до некоторого предельного значения  $E$ . При  $v_0=0$  и  $F(0)=eE(0)=0$  траектория частицы изображается плавной кривой (рис. 2.4, б) \*. Значение  $\Delta y$  монотонно нарастает от 0 до  $eE/m\omega^2 H$ . Если же при  $t=0$  напряженность электрического поля скачком ( $\omega H t \ll 1$ ) нарастает до предельного значения  $E$ , то с помощью общих формул (2.14) и (2.15) нетрудно установить, что траектория частицы будет представлять собой циклоиду (рис. 2.4, а). Дрейфовые скорости в обоих случаях при больших  $t$  оказываются одинаковыми, однако во

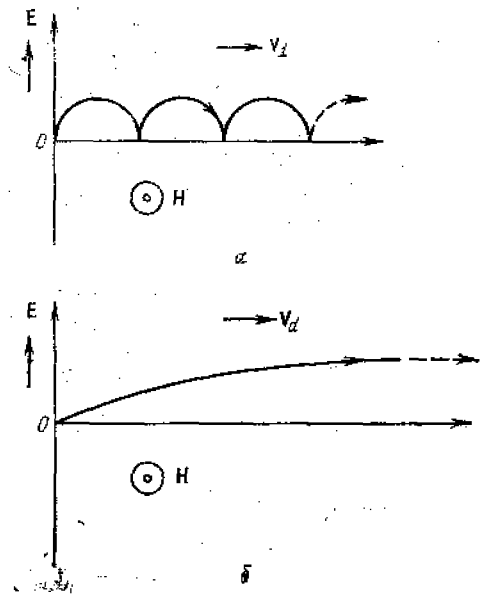


Рис. 2.4. Траектория частицы в скрещенных электрическом и магнитном полях при быстром (а) и медленном (б) включении электрического поля

\* За исключением очень небольших шероховатостей в начальной части кривой, вызванных присутствием малых членов, которые не учтены в формулах (2.12) и (2.13).

втором случае частица будет испытывать также ларморовское вращение с линейной скоростью, равной скорости дрейфа.

Если напряженность поперечного электрического поля изменяется с частотой  $\omega = \omega_H$ , то мы имеем дело с так называемым циклотронным резонансом. При прежних начальных условиях (равенство нулю начальных координат и скорости) и  $F = -eE_0 \sin \omega_H t$  из (2.11) и (2.14) следует:

$$\left. \begin{aligned} y &= c(E_0/H) \int_0^t \sin \omega_H t \sin \omega_H (t - u) du = \\ &= (cE_0/2\omega_H H) (\sin \omega_H t \cos \omega_H t); \\ x &= \omega_H \int_0^t y dt = (cE_0/2\omega_H H) \{2(1 - \cos \omega_H t) - \omega_H t \sin \omega_H t\}. \end{aligned} \right\} (2.32)$$

При  $\omega_H t \gg 1$

$$\left. \begin{aligned} x &\approx - (cE_0/2H) t \sin \omega_H t; \\ y &\approx - (cE_0/2H) t \cos \omega_H t. \end{aligned} \right\} (2.33)$$

т. е. траектория образует спираль, радиус которой растет пропорционально времени. При этом энергия частицы увеличивается пропорционально  $t^2$ .

## § 2.2. Примеры движения частиц в магнитном поле

Общие законы кинематики заряженных частиц в сильных магнитных полях можно проиллюстрировать на конкретных примерах. Укажем сначала на один важный результат, вытекающий из закона сохранения отношения  $\omega_{\perp}/H$ . Энергия поперечного ларморовского вращения  $\omega_{\perp} = \omega_0 \sin^2 \alpha$ , где  $\omega_0$  — полная кинетическая энергия частицы, а  $\alpha$  — угол между векторами  $\mathbf{v}$  и  $\mathbf{H}$ . При движении в постоянном во времени магнитном поле  $\omega_0$  не изменяется. Поэтому постоянство  $\omega_{\perp}/H$  означает, что сохраняется отношение  $\sin^2 \alpha/H$ .

Пусть в некоторой точке траектории  $\alpha = \alpha_1$  и  $H = H_1$ . При таких начальных условиях угол  $\alpha$  в любой точке траектории можно найти с помощью равенства  $\sin^2 \alpha/H = \sin^2 \alpha_1/H_1$ , откуда

$$\sin \alpha = \sin \alpha_1 \sqrt{H/H_1}. \quad (2.34)$$

Если частица движется вдоль силовой линии в сторону возрастающего поля и достигает точки, в которой  $W_{\perp} = W_0$ , то угол  $\alpha$  становится равным  $\pi/2$  и, следовательно, продольная скорость

обращается в нуль. Это означает, что в указанной точке направление продольного движения изменяется. Отразившись от области сильного магнитного поля, частица уходит обратно в сторону более слабого поля. Таким образом, области сильного поля при некоторых условиях могут играть для заряженных частиц роль своеобразных магнитных зеркал. Через такие зеркала могут проходить только частицы с малым начальным углом наклона  $\alpha_1$ . Физический механизм, вызывающий отражение частиц от областей с сильным магнитным полем, достаточно ясен. Здесь проявляется действие диамагнитной силы  $\mu \operatorname{grad} H$ , которая направлена в сторону слабого поля.

Движение заряженных частиц в магнитных полях при определенных условиях может оказаться финитным, т. е. будет происходить в ограниченной области пространства. Это, в частности, может иметь место из-за отражения частицы от магнитных зеркал.

Пусть напряженность поля нарастает вдоль силовых линий в обе стороны от некоторой средней области, где  $H \approx H_1$  (рис. 2.5). Частица, находящаяся в этой области, будет заперта в пространстве

между магнитными зеркалами (зонами сгущения силовых линий), если угол наклона ее траектории  $\alpha_1$  превосходит некоторое минимальное значение, и будет колебаться вдоль ограниченных участков силовых линий. Магнитное поле, в котором можно организовать «длительное хранение» заряженных частиц, используя эффект отражения от магнитных зеркал (или пробок), можно создать, например, с помощью длинного прямого соленоида, плотность намотки в котором увеличивается при приближении к торцам. Роль гигантской магнитной ловушки в природе выполняет магнитное поле Земли, удерживающее заряженные частицы в районе так называемых радиационных поясов.

Частицы, оказавшиеся в ловушке с магнитными зеркалами, совершают не только колебательные движения вдоль силовых линий. В поле с искривленными силовыми линиями они будут также дрейфовать перпендикулярно к  $\mathbf{H}$  (см. рис. 2.5). Однако такой дрейф не приведет к уходу частиц из ловушки, так как инвариантность  $\sin^2 \alpha$  при наличии дрейфа не нарушается. В отсутствие электрического поля и при постоянном во времени магнитном поле частица может ускользнуть из ловушки только в результате удачного для нее столкновения с какой-либо другой частицей.

В качестве другого примера рассмотрим траектории заряженных частиц в винтовом тороидальном поле. Такое поле создается в системах для получения высокотемпературной плазмы, используемых в исследованиях по управляемому термоядерному синтезу. В этом случае магнитное поле есть суперпозиция двух полей:



Рис. 2.5. Осевая линия траектории частицы в поле с магнитными пробками

магнитного поля  $H_\varphi$ , создаваемого током, текущим вдоль кольцевого плазменного витка, и продольного магнитного поля  $H_0$  внешнего происхождения, замкнутые силовые линии которого параллельны току (рис. 2.6). При этом  $H_0 \gg H_\varphi$  и радиус поперечного сечения плазменного витка, в котором происходит движение частиц, мал по сравнению с радиусом кольца  $R$ . Предполагается, что имеет место симметрия по отношению к главной оси тороидальной системы.

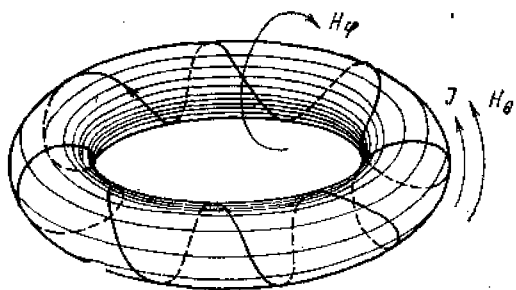


Рис. 2.6. Тороидальное винтовое магнитное поле

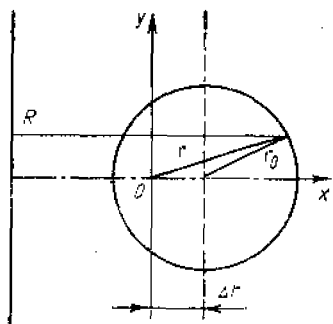


Рис. 2.7. Проекция траектории частицы в тороидальном поле на плоскость  $x, y$

Для описания траектории частицы в винтовом тороидальном поле введем координаты  $x, y$  и  $\theta$  (рис. 2.7). Осевая линия кольцевого тока пересекает плоскость чертежа в точке  $O$ , где  $x=y=0$ . Координата  $\theta$  определяет угол поворота вокруг главной оси тороида. Предположим далее, что  $H_\varphi$  зависит только от  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ . Продольное магнитное поле  $H_0$  обратно пропорционально расстоянию до главной оси тороидальной системы и при  $r/R \ll 1$  определяется равенством

$$H_0 = H_0 R_0 / (R_0 + x) \approx H_0 [1 - (x/R_0)], \quad (2.35)$$

где  $H_0$  — напряженность продольного поля в точке  $O$ .

В рассматриваемой магнитной системе движение центра лармовской окружности частицы будет складываться из перемещения вдоль силовой линии со скоростью  $v_{\parallel}$  и магнитного дрейфа со скоростью  $u_d$ . Нетрудно показать, что если соблюдается условие  $H_\varphi/H_0 \ll r/R$ , то влиянием  $H_\varphi$  на дрейфовую слагающую скорости можно пренебречь. В этом случае дрейфовая скорость направлена по оси  $y$  и равна

$$u_d \approx [v_{\parallel}^2 + (1/2)v_{\perp}^2] / \omega_H R_0 \approx [v_{\parallel}^2 - (1/2)v_{\perp}^2] / \omega_H R_0, \quad (2.36)$$

где  $v_0$  — неизменная величина вектора скорости частицы. Поскольку  $H \approx H_0$ , а  $H_0$  согласно (2.35) мало изменяется вдоль силовой линии, то  $v_{\perp}^2$  также испытывает лишь небольшое изменение при движении частицы и, следовательно,  $u_d$  можно считать в первом приближении постоянной величиной. Слагающие результирующей скорости движения по осям  $x$  и  $y$  определяются выражениями

$$\begin{aligned} dx/dt &= -v_{\parallel} (H_{\varphi}/H) (y/r); \\ dy/dt &= v_{\parallel} (H_{\varphi}/H) (x/r) + u_d, \end{aligned} \quad (2.37)$$

где  $H = \sqrt{H_0^2 + H_{\varphi}^2} \approx H_0$ .

Уравнение траектории в плоскости  $xy$  имеет вид

$$\frac{H_{\varphi}}{H_0} \frac{1}{r} (x dx + y dy) = (H_{\varphi}/H_0) dr = - (u_d/v_{\parallel}) dx \quad (2.38)$$

или

$$dr/dx = - (u_d/v_{\parallel}) (H_0/H_{\varphi}). \quad (2.39)$$

Следует различать два разных класса траекторий. К первому из них принадлежат траектории так называемых пролетных частиц, у которых вектор скорости составляет не слишком большой угол с вектором  $\mathbf{H}$ , вследствие чего они свободно перемещаются вдоль силовых линий. Ко второму классу относятся траектории так называемых запертых частиц. У таких частиц угол наклона скорости к направлению магнитного поля относительно велик, и поэтому они колеблются вдоль ограниченных участков силовой линии между областями с более сильным полем. Поскольку напряженность магнитного поля вдоль силовой линии изменяется относительно мало, то в силу адиабатического постоянства отношения  $v_{\perp}^2/H$  ларморовская скорость  $v_{\perp}$  любой частицы испытывает относительно малые колебания вдоль траектории. В частности, для запертых частиц  $v_{\perp}$  должна в любой точке траектории иметь значение, близкое к результирующей скорости  $v_0$ . Определим с помощью уравнения (2.39) форму траектории для пролетных и запертых частиц.

Для того чтобы не усложнять вычислений, рассмотрим траектории таких пролетных частиц, у которых продольная скорость  $v_{\parallel}$  в любой точке траектории не слишком мала по сравнению с  $v_0$ , т. е. движение частицы не очень сильно замедляется в областях с максимальным значением  $H_0$  (при  $x$ , близких к  $r$ ). При указанном условии ввиду практической неизменности  $v_{\perp}$  значение  $v_{\parallel}$  относительно слабо изменяется при движении частицы. Следовательно, правую часть уравнения (2.39) можно в первом приближе-

нии считать величиной постоянной. Обозначим ее  $C$ . Нетрудно убедиться, что  $|C| \ll 1$ . Действительно,

$$|C| = \frac{u_d}{v_{\parallel}} \frac{H_0}{H_{\varphi}} \sim \frac{v^2}{\omega R} \frac{1}{v} \frac{H_0}{H_{\varphi}} \sim \frac{m v c}{e H_{\varphi}} \frac{1}{R} \sim \frac{r_{\varphi}}{R},$$

где  $r_{\varphi}$  — ларморовский радиус частицы в поле тока — величина, по общему условию достаточно малая. Заметим, что  $C \sim 1/H_{\varphi}$  и практически не зависит от  $H_0$ . Из (2.39) следует, что  $r = r_0 - Cx$ . Если пренебречь членами второго порядка малости относительно  $C$ , то (2.39) можно привести к виду  $(x - Cr_0)^2 + y^2 = r^2_0$ . Это уравнение окружности; центр которой смещен на расстояние  $Cr_0$  относитель-

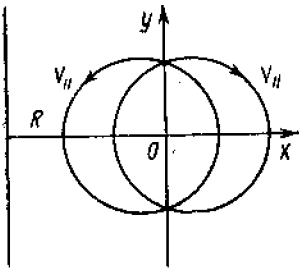


Рис. 2.8. Траектории пролетных частиц

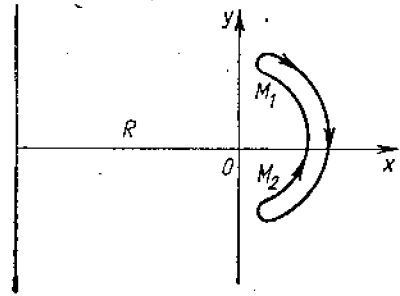


Рис. 2.9. Траектории запертых частиц

но осевой линии винтового магнитного поля (рис. 2.8). При своем движении частица отклоняется от силовой линии на расстояние

$$Cr_0 \sim r_0 (H_0/H_{\varphi}) (r/R),$$

где  $r_0$  — ларморовский радиус в результирующем магнитном поле. При соблюдении условия  $H_0/H_{\varphi} \ll r/R$  это отклонение может в несколько раз превысить ларморовский радиус, но оно остается малым по сравнению с  $r_0$ . Следовательно, пролетные частицы с не слишком малой  $v_{\parallel}$  хорошо удерживаются в винтовом поле. Более детальный анализ показывает, что это имеет место для любых пролетных частиц.

Выясним теперь поведение запертых частиц. В этом случае  $v_{\parallel} < v_{\perp}$  и продольная скорость  $v_{\parallel}$  сильно изменяется вдоль траектории, обращаясь в нуль в точках отражения от области с более сильным полем (рис. 2.9), между которыми происходит колебание частиц. (В плоскости  $xy$  частица колеблется между точками  $M_1$  и  $M_2$ ). В данном случае в уравнении (2.39) правая часть уже не

является постоянной величиной. Из адиабатической инвариантности  $v_{\perp}^2/H$  следует, что

$$v_{\parallel} = \pm v_{\perp} \sqrt{x - x_m / \sqrt{R_0}},$$

где  $x_m$  — абсцисса точки отражения\*. Дрейфовую скорость  $u_d$  в этом случае также можно считать практически постоянной. Интегрируя (2.39) с учетом указанной зависимости для  $v_{\parallel}$ , получаем

$$\Delta r = r - r_0 = \frac{2u_d}{v_{\perp}} \frac{H_0}{H_{\phi}} \sqrt{r R_0 (1 - \cos \varphi_m)}.$$

Здесь  $\varphi_m$  — значение угла  $\varphi$  в точке отражения. На рис. 2.9 изображена форма траектории в проекции, напоминающая банан. Как нетрудно убедиться, смещение  $\Delta r_m$  для запертых частиц значительно превосходит смещение для пролетных частиц (в отношении, пропорциональном  $\sqrt{2R/r}$  для двух противоположных предельных случаев). Следует отметить, что компенсация дрейфа при движении запертых частиц происходит в результате того, что точки поворота траектории  $M_1$  и  $M_2$  расположены симметрично относительно экваториальной плоскости плазменного витка. Такое расположение точек поворота будет иметь место только при наличии аксиальной симметрии по углу  $\theta$ . В противном случае траектории могут стать незамкнутыми, что должно ухудшать удержание частиц в магнитной системе рассматриваемого типа, которая может служить простейшим примером «замкнутой магнитной ловушки». В идеальном случае частицы могут уходить из такой ловушки только в результате кулоновских столкновений друг с другом.

Вопрос о влиянии кулоновских столкновений на время удержания частиц и сохранение тепловой энергии в замкнутых ловушках будет обсуждаться ниже (см. § 2.17). Здесь мы ограничимся только одним замечанием по указанному поводу. Поскольку при своем движении в магнитном поле запертые частицы сильнее отклоняются от линии поля, то кулоновские столкновения быстрее выбрасывают их из магнитной ловушки. Для иллюстрации сравним рис. 2.10,а и б. На рис. 2.10,а показана проекция траектории частицы в однородном магнитном поле до и после столкновения с другой частицей, сопровождающегося относительно небольшим изменением вектора  $v$ . Смещение происходит на расстояние порядка доли ларморовского радиуса.

На рис. 2.10,б показано, как изменяется форма траектории запертой частицы при столкновении в точке  $M_0$ , которое приводит к небольшому повороту вектора скорости с изменением знака

\* Строго говоря, это справедливо только в области, где  $|v_{\parallel}| < v_{\perp}$ . Поэтому дальнейшие вычисления сохраняют силу лишь при не слишком малых значениях угла  $\varphi$ .



$v_{\parallel} (v_{\parallel} \ll v_{\perp})$ . В этом случае траектория смещается по радиусу  $r$  на расстояние

$$\sim 2\Delta r_m \sim 2r_H (H_0/H_{\phi}) (r/R) \sqrt{R/r}.$$

Поскольку  $(H_0/H_{\phi}) (r/R) \gg 1$  и  $R/r \gg 1$ , то смещение запертой частицы при столкновении в винтовом поле во много раз превосходит смещение частицы при столкновении в неискривленном магнитном поле и одинаковых значениях импульса и напряженности магнитного поля.

### § 2.3. Адиабатические инварианты движения частиц в магнитном поле

Вернемся к выводу о сохранении магнитного момента  $\mu$  заряженной частицы при движении в слабо меняющемся в пространстве магнитном поле. К этому вопросу можно подойти с более общей точки зрения. В классической механике при описании почти периодического (квазипериодического) движения консервативной системы говорят о некоторых приблизительно сохраняющихся величинах — адиабатических инвариантах. Так, например, если у маятника с медленно (адиабатически) меняющейся во времени длиной подвеса  $L$  (простейший случай квазипериодического движения) это изменение за период колебаний невелико, то справедлив закон сохранения адиабатического инварианта:

$$I = \int_{x_1}^{x_2} v dx, \quad (2.40)$$

где  $v$  — скорость осциллятора;  $x$  — координата, характеризующая его смещение от положения равновесия. Интеграл берется между двумя крайними точками траектории.

В общем случае произвольной консервативной системы, описываемой  $i$  обобщенными координатами  $q_i$  и соответствующими

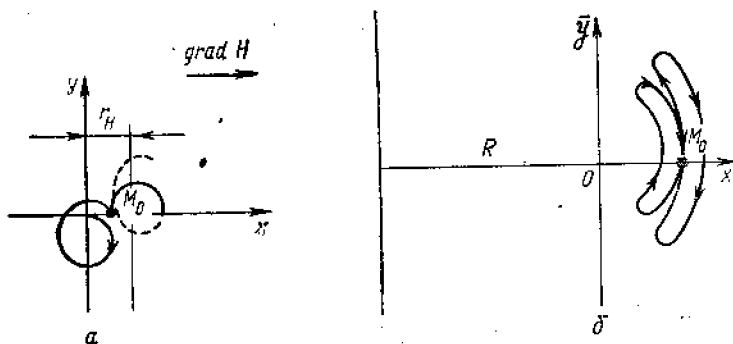


Рис. 2.10. Изменение траектории частицы при столкновении в однородном (а) и тороидальном (б) полях

обобщенными импульсами  $p_i$ , выражение для адиабатического инварианта имеет следующий вид:

$$I_i = \oint p_i dq_i, \quad (2.41)$$

где предполагается, что по координате  $q_i$  имеет место квазипериодическое движение. Таким образом, если система обладает  $N$  степенями свободы и по каждой степени свободы совершается квазипериодическое движение (с медленно по сравнению с периодом меняющимися параметрами), то существуют  $N$  адиабатических инвариантов.

Ларморовское вращение заряженной частицы вокруг силовых линий магнитного поля можно трактовать с этих позиций. В определение адиабатического инварианта (2.41) в случае ларморовского вращения частицы нужно подставить  $p = mv_{\perp}$  и  $dq = r_H d\varphi$ , где  $r_H$  — ларморовский радиус частицы, а  $\varphi$  — фаза вращения. Тогда

$$I_1 = m \int_0^{2\pi} v_{\perp} r_H d\varphi = 2\pi m^2 v_{\perp}^2 c / eH = (4\pi/e) mc\mu, \quad (2.42)$$

т. е.  $\mu = \text{const}$ . Таким образом, видим, что сохранение магнитного момента  $\mu$  заряженной частицы есть следствие общего принципа адиабатической инвариантности.

Первый адиабатический инвариант  $\mu$  можно записать и по-другому:

$$\mu = \pi r_H^2 H / (2\pi) (e^2 / mc^2) = \text{const}, \quad (2.43)$$

что означает сохранение магнитного потока через площадку, ограниченную ларморовской окружностью при вращении частицы в магнитном поле.

Применительно к общему случаю движения заряженной частицы в магнитном поле, изменяющемся во времени и пространстве, условия сохранения адиабатической инвариантности магнитного момента  $\mu$  имеют следующий вид:

$$|\dot{H}/H| \ll \omega_H; \quad 1/H |\text{grad } H| \ll 1/r_H. \quad (2.44)$$

Если заряженная частица заперта между двумя магнитными зеркалами (колеблется вдоль силовых линий, не выходя за пределы ограниченной области пространства), то такому движению также можно сопоставить соответствующий адиабатический инвариант  $I = \int mv_{\parallel} dl$ . Здесь интеграл берется вдоль силовой линии между двумя точками отражения частицы (где  $v_{\parallel}$  обращается в нуль), причем  $v_{\parallel}$  можно выразить с помощью следующих соотношений:

$$\omega_0 = mv_{\parallel}^2 / (2 + \omega_{\perp}); \quad \omega_{\perp} = \mu H.$$

Отсюда находим  $v_{\parallel}$  и, подставляя в формулу для адиабатического инварианта  $I_2$  (назовем его вторым, в отличие от  $\mu$  — первого адиабатического инварианта), получаем

$$I_2 = \oint \sqrt{\omega_0 - \mu H} dl. \quad (2.45)$$

Для выполнения условий сохранения второго адиабатического инварианта движения частицы нужно, чтобы за период одного колебания частицы между магнитными зеркалами магнитное поле вдоль силовой линии изменилось мало. Изменение поля вдоль силовой линии, по которой движется частица, может быть вызвано двумя причинами: 1) пространственной неоднородностью магнитного поля, приводящей к дрейфу частицы поперек (при таком дрейфе частица все время переходит с одной силовой линии на другую — с отличающимся, вообще говоря, магнитным полем); 2)

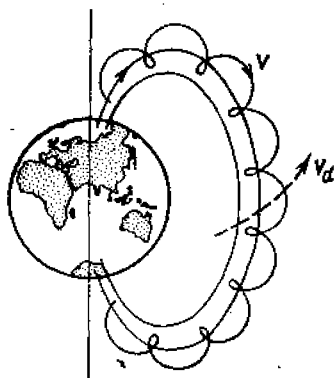


Рис. 2.11. Движение частицы в магнитном поле Земли

изменением общей картины силовых линий из-за нестационарности магнитного поля. В этом последнем случае энергия частицы уже не является интегралом движения, но адиабатический инвариант  $I_2$  сохраняется в обычном смысле.

Иногда можно говорить и о третьем адиабатическом инварианте движения заряженной частицы в магнитном поле. Такой инвариант соответствует дрейфовому движению частицы поперек силовой линии магнитного поля, если оно носит циклический характер. Так, движение заряженной частицы в изображенном на уже знакомом нам рис. 2.5 магнитном поле может

быть периодическим и для дрейфа. Вращаясь вокруг силовой линии и совершая продольные колебания вдоль силовой линии между областями с большим магнитным полем, частица медленно [с дрейфовой скоростью, описываемой выражением (2.22)] обходит силовую трубку по некоторой поверхности, изображенной на рис. 2.5.

Третий инвариант движения частицы используется в физике плазмы значительно реже первого и второго, поэтому мы не будем здесь вдаваться в детали. Укажем лишь, что роль  $I_3$  играет магнитный поток внутри силовой трубки, охватываемой дрейфовой траекторией частицы (см. рис. 2.5). Магнитный поток в такой силовой трубке сохраняется, если за период обращения частицы со скоростью дрейфа вокруг силовой трубки магнитное поле изменяется мало. Всеми описанными свойствами может обладать движение электронов и протонов в радиационных поясах Земли (рис. 2.11).

Первый адиабатический инвариант — это, естественно, магнитный момент. Второй адиабатический инвариант соответствует движению запертых частиц между магнитными зеркалами, расположенными у полюсов. Третий инвариант соответствует дрейфовому движению частиц в неоднородном магнитном поле Земли. Электроны согласно формуле (2.36), примененной к случаю магнитного поля Земли, дрейфуют с запада на восток, а ионы — в обратном

направлении. Время полного обхода вокруг земного шара при таком дрейфе для частиц, движущихся по силовым линиям с максимальным удалением от центра Земли  $R$ , имеет порядок  $2\pi eR^2/\mu c$ . Это значит, что третий адиабатический инвариант (магнитный поток через поверхность, охватываемую дрейфовой траекторией точки отражения частицы от магнитного зеркала) сохраняется, если магнитное поле мало меняется за время порядка  $2\pi eR^2/\mu c$ .

Большое принципиальное значение в динамике движения заряженных частиц имеет вопрос о точности сохранения адиабатических инвариантов. Разберем этот вопрос на примере  $\mu$ . В этом случае точность сохранения адиабатического инварианта  $\mu$  определяла бы длительность запертого движения частицы между магнитными зеркалами. Как уже говорилось, понятие об адиабатической инвариантности  $\mu$  имеет смысл при условиях (2.44). Естественно было бы ожидать, что сохранение инварианта является результатом разложения по малому параметру  $\epsilon \sim |\dot{H}|/\omega_H|H|$  или  $(r_H/|H|)|\text{grad } H|$ . Тогда следовало бы ожидать нарушения адиабатической инвариантности в следующем порядке по этому малому параметру. Однако более тонкие соображения показывают, что, вообще говоря, точность адиабатического инварианта гораздо выше. Оказывается, он сохраняется с так называемой экспоненциальной точностью  $|\Delta\mu/\mu| \sim \exp\{-1/\epsilon\}$ . Математический аппарат, используемый для доказательства этого утверждения, требует лишь, чтобы функции, описывающие поведение полей, в которых движется частица, были достаточно гладкими по отношению к изменению аргументов  $g$  и  $t$ .

Для иллюстрации обратимся к рассмотренному в § 2.2 движению частицы в однородном магнитном поле и поперечном электрическом поле, включенном при  $t=0$ . Скорость ларморовского вращения частицы в этом случае согласно выражениям (2.9), (2.12), (2.13) равна

$$\left. \begin{aligned} v_x &= \omega_H A \sin \omega_H t - \frac{1}{m\omega_H} \int_0^t \dot{F}(u) \cos \omega_H (t-u) du; \\ v_y &= \omega_H A \cos \omega_H t + \frac{1}{m\omega_H} \int_0^t \dot{F}(u) \sin \omega_H (t-u) du. \end{aligned} \right\} \quad (2.46)$$

Если электрическое поле возрастает по закону  $E(t) = E_0(1 - \exp\{-\alpha t\})$ , то изменение магнитного момента после включения поля (при  $t \gg 1/\alpha$ ) равно  $\Delta\mu \approx (eAE_0/H)(\alpha/\omega_H)$ . Низкая (порядка  $\alpha/\omega_H$ ) точность сохранения адиабатического инварианта объясняется тем, что изменение электрического поля не является достаточно гладким. Так, производная  $\dot{F}(t) = e\dot{E}(t)$  по  $t$  испытывает разрыв при  $t=0$ . Если включить электрическое поле достаточно плавно, ситуация изменится. Пусть, например, напряженность поля

зависит от времени по закону

$$E(t) = (\alpha E_0 / \sqrt{\pi}) \int_{-\infty}^t \exp(-\alpha^2 \tau^2) d\tau.$$

Такая форма зависимости означает, что «включение» происходит при  $t = -\infty$ , а при  $t \rightarrow \infty$   $E \rightarrow E_0$ . Вычисляя входящие в (2.46) интегралы, находим, что при  $t \rightarrow \infty$

$$\left. \begin{aligned} v_x &= v_0 \sin \omega_H t - \xi \cos \omega_H t; \\ v_y &= v_0 \cos \omega_H t + \xi \sin \omega_H t, \end{aligned} \right\} \quad (2.47)$$

где  $\xi = (1/2) (eE_0 / m\omega_H) \exp(-\omega_H^2 \alpha^2)$ .

Отсюда  $v^2 = v_0^2 + \xi^2$  и, следовательно,  $\Delta\mu/\mu = \xi^2/v_0^2 = (1/4) (e^2 E_0^2 / v_0^2 m^2 \omega_H^2) \exp(-2\omega_H^2 \alpha^2)$ .

Таким образом, изменение адиабатического инварианта в рассмотренном примере с идеально плавным включением действительно оказывается экспоненциально малым.

## § 2.4. Кинетическая теория плазмы в магнитном поле

Поведение ансамбля большого числа заряженных частиц в магнитном поле можно описывать с помощью функции распределения  $f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$  (для каждого сорта зарядов), которая определяется так же, как и для плазмы в отсутствие магнитного поля. Но в кинетическое уравнение, которому подчиняется такая функция распределения, нужно добавить еще одно слагаемое, учитывающее действие силы Лоренца  $(e/c) [\mathbf{v} \times \mathbf{H}]$ . Такое кинетическое уравнение имеет вид

$$\partial f / \partial t + \mathbf{v} \text{ grad } f + (e/m) \{ \mathbf{E} + (1/c) [\mathbf{v} \times \mathbf{H}] \} (\partial f / \partial \mathbf{v}) = \text{St}\{f\}. \quad (2.48)$$

Это уравнение отличается от кинетического уравнения (1.83) слагаемым  $(e/m) \left\{ \mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{v} \times \mathbf{H}] \right\} (\partial f / \partial \mathbf{v})$  [вместо  $(e/m) \mathbf{E} (\partial f / \partial \mathbf{v})$ ].

Однако может возникнуть вопрос, не изменится ли также характер столкновений между заряженными частицами при наличии магнитного поля. Траектории частиц, пролетающих друг от друга на расстояниях, сравнимых со средним ларморовским радиусом или больших его, в процессе рассеяния будут испытывать также искривление из-за магнитного поля. В результате дебаевской экранировки поля каждого отдельного заряда практически нужно учитывать лишь парные взаимодействия между частицами на расстояниях, меньших дебаевского радиуса.

Отсюда сразу же следует первый вывод: влияние магнитного поля на процесс рассеяния несущественно, если дебаевский радиус  $r_D$  плазмы меньше среднего ларморовского радиуса частиц  $r_H =$

$=mv_T c/eH$ , где  $v_T$  — средняя тепловая скорость. В применении к электронам, ларморовский радиус которых в  $\sqrt{m_i/m_e}$  раз меньше, чем у ионов при той же энергии, неравенство  $r_D < r_H$  можно привести к виду

$$\omega_H < \omega_p, \quad (2.49)$$

или

$$H^2/4\pi < nm_e c^2. \quad (2.50)$$

В конкретных условиях экспериментов с плазмой оно соблюдается только при не очень сильных магнитных полях. Однако несколько более углубленный анализ показывает, что нарушение условия  $\omega_H < \omega_p$  еще не равнозначно сильному влиянию магнитного поля на элементарные акты столкновений. Это связано с тем, что сечение кулоновского рассеяния [см. формулу (1.10)] содержит так называемый кулоновский логарифм  $L_K$ , возникающий, грубо говоря, вследствие обрезания (отбрасывания) столкновений, происходящих на расстояниях, больших  $r_D$ . В силу логарифмической зависимости сечения рассеяния от расстояния, на котором происходит обрезание, величина сечения не слишком чувствительна к параметру обрезания. Следовательно, влиянием магнитного поля на процесс столкновений можно пренебречь вплоть до таких параметров плазмы, при которых выполняется более мягкое условие

$$\ln \omega_H/\omega_p < L_K. \quad (2.51)$$

Оно неприменимо лишь для очень экзотических плазм (в чудовищно сильных магнитных полях).

Для теории плазмы выполнение неравенства (2.51) означает, что интеграл столкновений в правой части кинетического уравнения Больцмана сохраняет ту же форму, что и при отсутствии магнитного поля. Естественно, остаются прежними и формулы для длины свободного пробега заряженных частиц, времени между двумя столкновениями и все другие следствия в § 1.3.

Понятие самосогласованного поля в общем случае нужно распространять и на магнитное поле. Это значит, что в уравнении Максвелла для магнитного поля

$$\text{rot } \mathbf{H} = (4\pi/c)\mathbf{j} + (1/c)\partial\mathbf{E}/\partial t$$

следует учесть самосогласованный ток  $\mathbf{j}$ , переносимый зарядами плазмы. Поскольку по определению для любого сорта частиц  $n\mathbf{v} = \int \mathbf{v} f dv$ , то вклад каждого сорта частиц в плотность тока есть  $e n \mathbf{v} = e \int \mathbf{v} f dv$  и в итоге  $\mathbf{j} = \sum e_n \int \mathbf{v} f_n dv$ , где суммирование проводят по всем сортам частиц.

Для плазмы, состоящей из электронов и однозарядных ионов одного сорта, полная система уравнений кинетической теории с самосогласованным полем имеет вид:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial f_e}{\partial t} + \mathbf{v} \operatorname{grad} f_e - \frac{e}{m_e} \left\{ \mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{v} \times \mathbf{H}] \right\} \frac{\partial f_e}{\partial \mathbf{v}} &= \operatorname{St}(f_e); \\ \frac{\partial f_i}{\partial t} + \mathbf{v} \operatorname{grad} f_i + \frac{e}{m_i} \left\{ \mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{v} \times \mathbf{H}] \right\} \frac{\partial f_i}{\partial \mathbf{v}} &= \operatorname{St}(f_i); \\ \operatorname{rot} \mathbf{H} &= \frac{4\pi}{c} \mathbf{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}; \quad \operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}; \quad \operatorname{div} \mathbf{H} = 0. \end{aligned} \right\} (2.52)$$

Эти уравнения, так же как и соответствующие уравнения (1.84), (1.85) для плазмы без магнитного поля, являются основой для исследования динамики и установления уравнений гидродинамического приближения для плазмы в магнитном поле. Гидродинамическое приближение пригодно для описания плазмы, которая простирается на расстояния, значительно превышающие длину свободного пробега  $l$ . Существование магнитного поля в такой плазме по-разному сказывается на ее свойствах в зависимости от соотношения между длиной свободного пробега  $l$  и средним ларморовским радиусом частиц  $r_H$ . Если  $l \ll r_H$  (плотная плазма с относительно невысокой температурой, сравнительно небольшая напряженность магнитного поля  $H$ ), то влияние магнитного поля проявляется слабее. В противоположном случае, когда  $l \gg r_H$ , траектория частицы на длине свободного пробега успевает свернуться в винтовую линию. В этом случае можно пользоваться приближенной кинетической теорией плазмы в так называемом дрейфовом приближении. В дрейфовом кинетическом уравнении функция распределения частиц описывает плотность распределения центров ларморовских кружков в фазовом пространстве. В данном случае фазовое пространство представляет собой обычное координатное пространство  $\mathbf{r}$  ( $\mathbf{r}$  — радиус-вектор центра ларморовского кружка),  $v_{\parallel}$  — скорость движения заряда вдоль силовой линии магнитного поля;  $\mu$  — магнитный момент частицы.

Такое фазовое пространство описывается лишь пятью независимыми переменными вместо шести ( $\mathbf{r}, \mathbf{v}$ ). Левая часть дрейфового кинетического уравнения представляет собой уравнение непрерывности для функции  $f(\mathbf{r}, v_{\parallel}, \mu)$  в этом упрощенном фазовом пространстве:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \operatorname{div}_{\mathbf{r}}(\mathbf{u}_d f) + \frac{F_{\parallel}}{m} \frac{\partial f}{\partial v_{\parallel}} = \operatorname{St}\{f\}. \quad (2.53)$$

Здесь скорость  $\mathbf{u}_d$  имеет компоненту  $v_{\parallel}$  вдоль силовой линии магнитного поля, а скорость движения поперек магнитного поля определяется уравнениями дрейфового движения с учетом всех возможных типов дрейфа. Составляющая силы  $F_{\parallel}$ , действующая вдоль магнитной силовой линии, задается уравнением (2.21).

Интеграл столкновений при описании плазмы в дрейфовом приближении необходимо преобразовать к новым переменным  $v_{\parallel}, \mu$  вместо  $\mathbf{v}$ .

При вычислении плотности тока в такой плазме нужно соблюдать некоторую осторожность. Дело в том, что ток  $\mathbf{j}_d = en\mathbf{u}_d$ , создаваемый перемещением центров ларморовских кружков, не описывает полного переноса заряда. Существует еще дополнительный ток даже при покоящихся центрах ларморовских кружков, обусловленный их диамагнитным моментом  $\mu$ . При равномерном распределении диамагнетиков со средним моментом  $\mu$  и плотностью  $n$  в пространстве обтекающий ток возникает лишь на границе. Он приводит к ослаблению магнитного поля на величину  $\Delta H = 4\pi n\mu$ . При неоднородном распределении в пространстве возникает и объемный ток. Его плотность  $\mathbf{j}_D$  определяется из уравнения

$$\left. \begin{aligned} \text{rot } \Delta H &= \text{rot } 4\pi n\mu = 4\pi \mathbf{j}_D / c; \\ \mathbf{j}_D &= c \text{ rot } n\mu. \end{aligned} \right\} \quad (2.54)$$

Это есть искомый дополнительный ток. С помощью функции распределения представим его в следующем виде:

$$\mathbf{j}_D = c \text{ rot } \int \mu f dv, \quad \mu = -\mu H / H. \quad (2.54a)$$

Единичный вектор  $-\mathbf{H}/H$  означает, что магнитные моменты частиц ориентированы против поля.

Вернемся к условию  $l \gg r_H$ , выделяющему область сильного влияния магнитного поля на траектории частиц в плазме и, следовательно, на всю кинетику плазмы в целом. Учитывая, что  $l = v_T \tau$  и  $r_H = v_T / \omega_H$ , где  $\tau$  — время свободного пробега, условие  $l \gg r_H$  можно представить в виде

$$\omega_H \tau \gg 1. \quad (2.55)$$

Неравенство (2.55) называют критерием замагниченности плазмы, а плазму, удовлетворяющую этому критерию, замагниченной. Оно требует дополнительной конкретизации для электронов и ионов. При одинаковых температурах и длинах свободного пробега имеем

$$\omega_{He} \tau_e = (m_i / m_e)^{1/2} \omega_{Hi} \tau_i.$$

Поэтому для одной и той же плазмы электроны могут быть «замагничены», а ионы нет. Как раз такая ситуация часто осуществляется в низкотемпературной плазме МГД-генераторов. В высокотемпературных или достаточно разреженных плазмах замагниченными оказываются и электроны, и ионы. К таким плазмам относятся: плазма в магнитных термоядерных ловушках, в верхних слоях ионосферы, в магнитосфере Земли, солнечной короне, в газовых разрядах при низком давлении.

Во многих представляющих интерес случаях процессы, протекающие в плазме, охватывают промежутки времени, меньшие времени соударения, но значительно превышающие период ларморовского оборота частиц в магнитном поле. При этом можно прене-



бредь парными соударениями частиц, т. е. опустить интеграл столкновений в правой части дрейфового кинетического уравнения (2.53). Тогда оно описывает поведение своеобразной бесстолкновительной плазмы в магнитном поле. Подобная модель часто используется для исследования колебаний и волн в плазме и для анализа некоторых важных неустойчивостей плазмы в магнитном поле.

## § 2.5. Гидродинамика плазмы в магнитном поле

Гидродинамическое приближение для плазмы в магнитном поле можно получить так же, как это было сделано в § 1.5 для плазмы без магнитного поля.

При рассмотрении плазмы, свойства которой меняются на расстояниях  $L_p$ , значительно больших длин свободного пробега  $l$  за промежутки времени  $\tau_p$ , большие времени свободного пробега, функции распределения ионов и электронов следует считать близкими к максвелловским. В такой плазме состояние каждой заряженной компоненты задается плотностью  $n(\mathbf{r}, t)$ , температурой  $T(\mathbf{r}, t)$  и средней макроскопической скоростью  $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$ . Уравнения для этих величин, т. е. уравнения гидродинамики, выводятся, как и в § 1.5, нахождением моментов от кинетического уравнения (2.52). Эти вычисления аналогичны вычислениям, проведенным в § 1.10, поэтому их не стоит повторять. Нужно лишь учесть, что кинетическое уравнение (2.52) содержит дополнительное слагаемое в правой части с силой Лоренца

$$(e/mc) [\mathbf{v} \times \mathbf{H}] (\partial f / \partial \mathbf{v}). \quad (2.56)$$

Простое интегрирование по  $d\mathbf{v}$  (нулевой момент) этого слагаемого дает нуль. Это и не удивительно, так как сила Лоренца не может изменить баланс числа частиц, учитываемый уравнением непрерывности:  $\partial n / \partial t + \text{div } n\mathbf{u} = 0$ .

В уравнении Эйлера, получающемся при вычислении момента первого порядка — умножении на  $\mathbf{v}$  и последующем интегрировании по  $d\mathbf{v}$  (по частям) член с силой Лоренца дает

$$\int \mathbf{v} \frac{e}{mc} [\mathbf{v} \times \mathbf{H}] \frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}} d\mathbf{v} = -\frac{e}{mc} \int [\mathbf{v} \times \mathbf{H}] f d\mathbf{v} = \frac{e}{mc} n [\mathbf{u} \times \mathbf{H}].$$

Это есть не что иное, как средняя сила Лоренца, действующая на все частицы одного сорта в единице объема. Итак, в старом уравнении Эйлера для плазмы без магнитного поля (1.102) добавляется слагаемое  $(e/c)n[\mathbf{u} \times \mathbf{H}]$  в правой части:

$$mn(d\mathbf{u}/dt) = -\text{grad } p + en\mathbf{E} + (e/c)n[\mathbf{u} \times \mathbf{H}]. \quad (2.57)$$

Уравнение для температуры остается неизменным, если не учитывать возможного изменения теплопроводности. Таким образом, каждая заряженная компонента плазмы в гидродинамическом приближении описывается системой уравнений (1.100), (1.106) и (2.57). Учтем теперь столкновения между частицами разного сорта.

Так же как и в § 1.10, это дает силу взаимного трения между компонентами плазмы в уравнениях Эйлера. Тогда уравнения движения двухжидкостной гидродинамики для квазинейтральной плазмы, состоящей из электронов и такого же числа ионов одного сорта ( $n_i = n_e = n$ ), принимают вид

$$nm_i \frac{d\mathbf{u}_i}{dt} = -\nabla p_i + enE + \frac{e}{c} n [\mathbf{u}_i \times \mathbf{H}] - m_e (\mathbf{u}_i - \mathbf{u}_e) \nu_{ei} n; \quad (2.58)$$

$$nm_e \frac{d\mathbf{u}_e}{dt} = -\nabla p_e - enE - \frac{e}{c} n [\mathbf{u}_e \times \mathbf{H}] + m_e (\mathbf{u}_i - \mathbf{u}_e) \nu_{ei} n. \quad (2.59)$$

По отношению к этим уравнениям справедливо замечание, сделанное в § 1.10 в связи с анализом гидродинамического приближения в теории плазмы. По существу для упрощенного вывода уравнений динамики плазмы в гидродинамическом приближении как в отсутствие, так и при наличии магнитного поля нет нужды в использовании аппарата кинетических уравнений, поскольку имеем здесь дело с простым применением самых общих законов динамики к движению микроскопических элементов обеих компонент плазменной субстанции.

Переход к описанию плазмы как единой жидкости можно провести, складывая уравнения (2.58) и (2.59). При этом обычно пренебрегают инерцией электронов, а суммарная электрическая сила, действующая на элемент объема плазмы, обращается в нуль из-за квазинейтральности. Также исчезает сумма противоположно направленных и равных по величине сил трения между ионами и электронами. Сумма сил Лоренца  $(en/c) [(\mathbf{u}_i - \mathbf{u}_e) \times \mathbf{H}]$  приводится к виду  $(1/c) [\mathbf{j} \times \mathbf{H}]$  (сила Ампера), так как  $en(\mathbf{u}_i - \mathbf{u}_e) = \mathbf{j}$ .

В результате уравнение Эйлера одножидкостной гидродинамики плазмы в магнитном поле (ее чаще называют магнитной гидродинамикой) имеет вид

$$\left. \begin{aligned} nM d\mathbf{u}/dt &= (1/c) [\mathbf{j} \times \mathbf{H}] - \text{grad}(p_i + p_e); \\ \mathbf{u} &= (m_i \mathbf{u}_i + m_e \mathbf{u}_e) / (m_i + m_e); \\ M &= m_i + m_e. \end{aligned} \right\} \quad (2.60)$$

Плотность тока  $\mathbf{j}$  можно выразить через  $\mathbf{H}$  из уравнения Максвелла  $\text{rot } \mathbf{H} = (4\pi/c) \mathbf{j}$ . Исключив  $\mathbf{j}$ , силу Ампера можно представить в виде

$$(1/c) [\mathbf{j} \times \mathbf{H}] = (1/4\pi) [\text{rot } \mathbf{H} \times \mathbf{H}].$$

Векторное произведение в правой части удобно раскрыть с помощью известного векторного тождества

$$(1/2) \text{grad } a^2 = (\mathbf{a} \text{ grad}) \mathbf{a} + [\mathbf{a} \times \text{rot } \mathbf{a}].$$

В применении к рассматриваемому случаю это дает

$$(1/4\pi) [\text{rot } \mathbf{H} \times \mathbf{H}] = -\text{grad } H^2/8\pi + (1/4\pi) (\mathbf{H} \text{ grad}) \mathbf{H}. \quad (2.61)$$

Первый член в правой части уравнения (2.61) можно интерпретировать как градиент магнитного давления  $H^2/8\pi$ . Второй член

называют силой натяжения силовых линий магнитного поля. Он отличен от нуля только для магнитного поля с кривыми силовыми линиями. Соответствующая ему сила всегда оказывается направленной в сторону, противоположную искривлению силовой линии.

В магнитной гидродинамике неизвестными величинами являются плотность  $n$ , скорость  $u$ , давление  $p$  и магнитное поле  $H$ . Число уравнений для определения этих величин должно соответствовать числу самих неизвестных функций. Три уравнения (для определения  $n$ ,  $u$ ,  $p$ ) у нас есть. Это уравнение непрерывности для  $n$ , уравнение Эйлера для  $u$  (2.60) и уравнение состояния для давления. Недостающее уравнение для магнитного поля выводится по следующей схеме. Нужно воспользоваться уравнением Максвелла  $\text{rot } E = -(1/c) (\partial H / \partial t)$  и подставить в него электрическое поле  $E$ , выраженное через плотность тока с помощью закона Ома. Но при наличии магнитного поля связь между  $j$  и  $E$ , т. е. закон Ома, отличается от результата, полученного в ч. 1.

Для того чтобы выяснить характер связи в общем случае, обратимся снова к уравнениям, характеризующим поведение обеих компонент плазмы. Умножая уравнения (2.58) на  $m_e$  и (2.59) на  $m_i$  и вычитая одно из другого, получаем

$$-\frac{e}{c} n [(u_i - u_e) \times H] + \text{grad } p_e - j \frac{en}{\sigma} + enE + \frac{en}{c} [u \times H] = 0. \quad (2.62)$$

В правой части этого выражения отброшены члены порядка  $m_e/m_i$ , а в левой — инерционные члены, поскольку предполагается, что заметное изменение плотности тока может происходить лишь за времена  $\tau_p \gg \tau_{ei}$  и на расстояниях  $L_p \gg l$ . Теперь удобно представить (2.62) в следующем виде:

$$j = \sigma \left( E + \left[ \frac{1}{c} u \times H \right] \right) - \frac{\sigma}{enc} [j \times H] + \frac{\sigma}{en} \text{grad } p_e. \quad (2.63)$$

Это соотношение является обобщением закона Ома для плазмы, находящейся в магнитном поле. В частности, когда ток течет параллельно магнитному полю и плазма является однородной (т. е. градиент давления отсутствует), соотношение (2.63) совпадает с выведенным в предыдущей главе соотношением (1.21) с той лишь разницей, что  $E$  надо заменить на  $E' = E + (1/c) [u \times H]$ . Однако в общем случае уравнение для  $j$  отличается от простого закона Ома дополнительными членами в правой части, из которых первый пропорционален градиенту электронного давления, а второй содержит векторное произведение  $[j \times H]$ . Эти дополнительные члены имеют простое физическое истолкование. В выражении для  $j$  появляется величина  $(e/m_e v_{ei}) \nabla p_e$ , так как ток в ионизованном газе может быть вызван не только электрическим полем, но также и разностью электронных давлений в различных точках пространства. Член, содержащий  $[j \times H]$ , свидетельствует о влиянии магнитного поля на движение электронов в плазме.

Из-за указанных дополнительных членов между плотностью тока и напряженностью электрического поля нет простой связи. При заданных значениях  $E'$  плотность тока может иметь самые различные значения. Эта неопределенность существенно ослабляется в том случае, когда плазма находится в квазистационарном состоянии, т. е. при  $du/dt=0$ .

В квазистационарном состоянии основные уравнения (2.60) и (2.63) принимают вид

$$\frac{1}{c} [\mathbf{j} \times \mathbf{H}] = \text{grad } p_i \quad (2.64)$$

$$\mathbf{j} = c \left( \mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{u} \times \mathbf{H}] - \frac{1}{ne} \text{grad } p_i \right). \quad (2.65)$$

Сделав естественное допущение о том, что  $\text{grad } p_e$  и  $\text{grad } p_i$  направлены параллельно друг другу, находим из (2.64), что  $\text{grad } p_i \perp \mathbf{j}$ . Обращаясь к (2.65), видим, что вектор  $E'$  должен иметь две взаимно перпендикулярные компоненты  $E'_{\parallel}$  и  $E'_{\perp}$ , из которых  $E'_{\parallel} \parallel \mathbf{j}$ , а  $E'_{\perp} \parallel \text{grad } p_i$ .

Из (2.65) находим, что  $\mathbf{j}_{\parallel} = cE'_{\parallel}$ . Следовательно, для компоненты  $\mathbf{j}_{\parallel}$  справедлив закон Ома. Компонента  $E'_{\perp}$  не создает тока. Она уравновешивает градиент ионного давления

$$E'_{\perp} = \text{grad } p_i / ne. \quad (2.66)$$

Неколлинеарность векторов  $E'$  и  $\mathbf{j}$  приводит к эффекту Холла — появлению составляющей тока, перпендикулярной к электрическому полю.

Физический смысл этих результатов можно разъяснить на основе простых соображений. Ввиду того, что ток создается электронами, сила  $[\mathbf{j} \times \mathbf{H}]$ , действующая на плазму со стороны магнитного поля, приложена к электронному газу. Эта сила, в частности, создает перепад электронного давления  $p_e$ . Из-за условия квазинейтральности  $p_i$  следует за изменением  $p_e$ . Однако градиент  $p_i$  может поддерживаться только в том случае, если существует сила, мешающая выравниванию ионных давлений. Она должна быть направлена так же, как  $\text{grad } p_i$ , т. е. перпендикулярно к  $\mathbf{j}$  и  $\mathbf{H}$ . Такой силой как раз и является компонента электрического поля  $E'_{\perp} \perp \mathbf{j}$ . Она обеспечивает сохранение квазинейтральности плазмы, не давая ионам оторваться от электронов. Для этой компоненты закон Ома, очевидно, не имеет силы. Если плазма неподвижна (статический случай), то по отношению к компоненте электрического поля, параллельной току, справедлив закон Ома в обычной форме:  $\mathbf{j} = cE'_{\parallel}$ .

Для того чтобы исключить электрическое поле из уравнений магнитной гидродинамики, возьмем rot от обеих частей уравне-

ния (2.63):

$$\frac{1}{\sigma} \operatorname{rot} \mathbf{j} = \operatorname{rot} \mathbf{E} + \frac{1}{c} \operatorname{rot} [\mathbf{u} \times \mathbf{H}] - \frac{1}{ec} \operatorname{rot} \frac{1}{n} [\mathbf{j} \times \mathbf{H}] + \\ + \frac{1}{c} \operatorname{rot} \frac{1}{n} \operatorname{grad} p_e. \quad (2.67)$$

Далее, используя  $\operatorname{rot} \mathbf{E} = -(1/c) (\partial \mathbf{H} / \partial t)$  и  $\operatorname{rot} \mathbf{H} = 4\pi \mathbf{j} / c$ , получаем недостающее уравнение для магнитного поля

$$\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = \operatorname{rot} [\mathbf{u} \times \mathbf{H}] - \frac{c}{4\pi\sigma} \operatorname{rot} \frac{1}{n} [\operatorname{rot} \mathbf{H} \times \mathbf{H}] - \\ - \frac{c}{en} [\operatorname{grad} n \times \operatorname{grad} T_e] + \frac{c^2}{4\pi\sigma} \Delta \mathbf{H}. \quad (2.68)$$

Это уравнение можно привести к более симметричному виду, если с помощью уравнения Эйлера исключить второе слагаемое справа и учесть, что  $\operatorname{rot} d\mathbf{u} / dt = \partial \operatorname{rot} \mathbf{u} / \partial t - \operatorname{rot} [\mathbf{u} \times \operatorname{rot} \mathbf{u}]$ .

Итак,

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \mathbf{H} + \frac{Mc}{e} \operatorname{rot} \mathbf{u} \right) = \operatorname{rot} \left[ \mathbf{u} \times \left( \mathbf{H} + \frac{Mc}{e} \operatorname{rot} \mathbf{u} \right) \right] + \\ + \frac{c}{en} [\operatorname{grad} n \times \operatorname{grad} T_e] + \frac{c^2}{4\pi\sigma} \Delta \mathbf{H}. \quad (2.69)$$

Член, содержащий  $[\operatorname{grad} n \times \operatorname{grad} T_e]$ , обычно не играет важной роли, за исключением тех случаев, когда плотность и температура зависят от координат совершенно по-разному. Для простоты не будем его учитывать. Последнее слагаемое в правой части этого уравнения описывает процесс своеобразной диффузии магнитного поля. Отложим на время обсуждение этого явления и рассмотрим случай, когда проводимость плазмы достаточно высока и этим членом можно пренебречь. Тогда уравнение (2.69) является обобщением известного уравнения переноса  $\operatorname{rot} \mathbf{u}$  из обычной гидродинамики — так называемого уравнения «приклеенности» линий вихря скорости к веществу. В достаточно большом магнитном поле  $eH / Mc \gg u / L_p$  уравнение упрощается:

$$\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = \operatorname{rot} [\mathbf{u} \times \mathbf{H}] + \frac{c^2}{4\pi\sigma} \Delta \mathbf{H}. \quad (2.70)$$

Именно это уравнение часто используется вместо четвертого, недостающего уравнения магнитной гидродинамики. В частном случае плоского движения, когда магнитное поле имеет лишь одну компоненту, например  $H_z$ , зависящую от двух координат  $x$  и  $y$ , а скорость  $\mathbf{u}$  имеет только компоненты  $u_x$  и  $u_y$ , уравнение (2.70) приобретает вид

$$\frac{\partial H_z}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (u_x H_z) + \frac{\partial}{\partial y} (u_y H_z) = \frac{c^2}{4\pi\sigma} \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) H_z, \quad (2.71)$$

напоминающий уравнение непрерывности для плотности при плоском движении (если отвлечься от правой части).

Уравнение (2.70) называют уравнением «вмороженности» для магнитного поля. Рассмотрим это явление подробнее. Плазма — хороший проводник. Поэтому если она быстро движется, пересекая силовые линии магнитного поля, то появляются индуцированные токи, которые изменяют распределение напряженности магнитного поля. Общий характер этого изменения таков, как будто при своем движении плазма увлекает вместе с собой линии поля. Линии поля ведут себя так, как будто они были «вморожены» в плазму (или склеены с ней).

Для того чтобы лучше понять, в чем состоит это явление, рассмотрим частный случай движения плазмы. Пусть плазма заполняет объем, в котором создано магнитное поле, направленное параллельно оси  $z$ . При этом напряженность поля изменяется по некоторому закону в плоскости, перпендикулярной к направлению  $z$ , т. е. в плоскости  $xy$ . Концентрация плазмы постоянна вдоль силовых линий, но также может быть функцией координат  $x$  и  $y$ .

Предположим, что плазма движется перпендикулярно к силовым линиям. Выделим мысленно в пространстве тонкий столбик плазмы, параллельный  $H$ . Пусть площадь его сечения плоскостью  $xy$  равна  $dS$ . При движении плазмы выделенный столбик испытывает сжатие или расширение, в результате чего его поперечное сечение изменяется. Поскольку полное число частиц внутри столбика должно сохраняться, справедливо соотношение  $ndS = \text{const}$ . Кроме того, должно оставаться постоянным также значение магнитного потока, проходящего через сечение  $dS$ . В плазме с достаточно хорошей электропроводностью даже незначительное изменение магнитного потока, если оно происходит быстро, приведет к возникновению большого индукционного тока. Магнитное поле этого тока компенсирует изменение потока. Сохранение потока означает, что  $HdS = \text{const}$ .

Из сказанного выше следует, что в рассматриваемом случае при движении плазмы отношение  $H/n$  остается постоянным. Если плазма сжимается, то напряженность поля в ней возрастает, расширение плазмы влечет за собой ослабление магнитного поля. Перераспределение плотности в результате быстрых деформаций приводит к соответствующему изменению распределения напряженности поля в пространстве. В этой связи между деформациями плазмы и поля, вытекающей из сохранения магнитного потока в движущемся материальном элементе объема, и заключается вмороженность силовых линий.

Нужно, однако, отметить, что постоянство отношения  $H/n$  не является законом: оно имеет место только в том конкретном случае, о котором говорилось выше. При других геометрических условиях соотношение между напряженностью поля и концентрацией в быстро движущейся плазме может иметь иную форму. Так, например, в аксиально-симметричной плазменной струе, движущейся под действием электродинамических сил, обусловленных током, который проходит через плазму (рис. 2.12) в каждом элементе объ-

ема во время его движения остается постоянным отношение  $H/nr$ , где  $r$  — расстояние от данного элемента объема до оси системы.

Еще одно замечание может оказаться полезным. Вмороженность силовых линий не следует считать явлением, специфически связанным со свойствами плазмы. Аналогичный эффект будет наблюдаться в любом хорошем проводнике, движущемся в магнитном поле с достаточно высокой скоростью. Вообще уравнениям магнитной гидродинамики подчиняется не только движение плазмы в магнитном поле, но и движение любой другой газообразной или жидкой среды, обладающей способностью проводить электрический

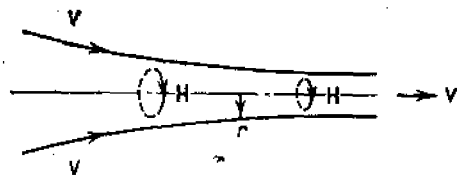


Рис. 2.12. Вмороженность магнитного поля в плазме аксиально-симметричной струи

ток. Примером таких сред могут служить расплавленные металлы. Классические опыты Альвена по магнитной гидродинамике были проведены с жидкой ртутью.

Теперь вернемся к исходному уравнению (2.70) и разберемся в механизме «диффузии» магнитного поля, описываемой правой

частью этого уравнения. Как мы уже отмечали, явление вмороженности магнитного поля связано с возникновением индукционных токов, сопровождающих движение плазмы. Сколь бы велика ни была проводимость плазмы, за достаточно большой промежуток времени должна проявиться диссипация (затухание) этих токов из-за конечного сопротивления. Это, разумеется, должно привести к изменению магнитного поля. Так, например, если из-за деформации сжатия в какой-либо силовой трубке внутри плазмы было создано сгущение силовых линий магнитного поля, то в конце концов в результате затухания индукционных токов магнитное поле ослабнет. Можно сказать, часть силовых линий уйдет наружу. Этот процесс, как следует из уравнения (2.70), носит диффузионный характер. Соответствующий коэффициент диффузии магнитного поля пропорционален удельному электрическому сопротивлению плазмы  $D_M = c^2/4\pi\sigma^*$ . Часто этот коэффициент диффузии магнитного поля называют коэффициентом магнитной вязкости и обозначают символом  $\nu_m$ . Происхождение этого термина связано с аналогией между диффузией магнитного поля и вязким просачиванием  $\text{got}$  и в гидродинамике из-за обычной вязкости.

Подведем некоторые итоги анализа роли магнитного поля в гидродинамике плазмы. В уравнении движения появляются дополнительные силы, связанные с магнитным полем [см. уравнение

\* Очевидна связь между коэффициентом диффузии магнитного поля и известной формулой для глубины скин-слоя. Предположим, что на границе проводящей среды приложено переменное магнитное поле частоты  $\omega$ . Тогда за период колебаний поле успевает продиффундировать на глубину  $\delta \sim (D_M/\omega)^{1/2} = (c^2/4\pi\sigma\omega)^{1/2}$ , т. е. на глубину скин-слоя.

(2.57)]. Видоизменяется закон Ома для плазмы в магнитном поле: электропроводность плазмы остается неизменной лишь для электрического тока, текущего вдоль силовых линий магнитного поля; поперечные же магнитному полю токи могут сильно изменяться (в частности, возникает эффект Холла), если выполнено условие  $\omega_{He} \tau_e \gg 1$ , иначе говоря, если плазма «замагничена».

Зависимость электропроводности плазмы от магнитного поля — это лишь частный случай влияния магнитного поля на коэффициенты переноса. Если средний ларморовский радиус частиц плазмы меньше длины свободного пробега, то все явления переноса в плазме поперек магнитного поля заторможены. Это относится, например, к теплопроводности плазмы поперек силовых линий магнитного поля. Области с различными температурами могут сосуществовать в такой плазме рядом друг с другом, поскольку частицы совершают ларморовское вращение вокруг силовых линий магнитного поля, перемещаясь в направлении градиента температуры на величину порядка  $r_H$  при редких соударениях (это свойство плазмы, помещенной в магнитное поле, используется в так называемой магнитной термозоляции).

При некоторых условиях влияние магнитного поля оказывается еще более кардинальным. До сих пор мы считали, что гидродинамическое приближение (так же, как и в случаях без магнитного поля) справедливо лишь для плазмы с характерным масштабом пространственного изменения  $L_p$ , значительно превышающим длину свободного пробега:  $L_p \gg l$ . Представим себе теперь плазму с очень большой длиной свободного пробега  $l \gg L_p$ . Гидродинамическое описание такой плазмы в обычном смысле может показаться недопустимым. Действительно, в этом случае будет происходить свободный обмен частицами между областями с различными начальными значениями концентрации и температуры. В результате возникает состояние с функцией распределения, представляющей собой как бы случайную смесь различных максвелловских функций, и ни о какой температуре каждой локальной области говорить нельзя. Только в результате достаточно частых столкновений, которые мы учитывали при выводе гидродинамических уравнений, перемещение частиц затормаживается и восстанавливается локальное максвелловское распределение. Оказывается, с первой из этих задач с успехом может справиться также и сильное магнитное поле (даже когда нет столкновений). Конечно, это свойство магнитного поля относится только к движению частиц поперек магнитных силовых линий.

Таким образом, магнитное поле при полном отсутствии соударений приводит к возможности реализации своеобразного гидродинамического приближения для плазмы при ее движении поперек магнитных силовых линий. Условием применимости такой гидродинамики должно быть, как можно ожидать по аналогии с обычным случаем, следующее соотношение:

$$L_p \gg r_H \quad (2.72)$$



(здесь роль длины свободного пробега играет средний ларморовский радиус). В этой физической картине гидродинамические свойства плазмы не распространяются на ее движение вдоль силовых линий магнитного поля, так как частицы могут свободно перемещаться вдоль  $\mathbf{H}$ . Поэтому магнитная гидродинамика плазмы при условии  $L_p \gg r_H$  (иногда ее называют бесстолкновительной гидродинамикой) имеет смысл лишь когда речь идет о движении плазмы поперек  $\mathbf{H}$ . Так же, как и в обычной магнитной гидродинамике, силовые линии магнитного поля при движении бесстолкновительной плазмы переносятся вместе с ней, иначе говоря,  $\mathbf{H}$  подчиняется уравнению вмороженности. Претерпевает изменение уравнение адиабаты, связывающее давление плазмы с плотностью  $p = p(\rho)$ .

Эту связь можно найти из следующих простых соображений. Рассмотрим плазму внутри элементарной силовой трубки. Пусть первоначально давление плазмы было равно  $p$ , температура  $T$ , плотность  $n$ , а магнитное поле внутри силовой трубки  $H$ . Если в процессе эволюции состояния плазмы происходит сжатие (расширение) за время, значительно превышающее период обращения ионов в магнитном поле, то сохраняется магнитный момент  $\mu = \omega_{\perp} / H$  каждой частицы (вследствие адиабатической инвариантности). Это автоматически означает, что остается неизменным также и средний магнитный момент  $\bar{\mu} = T_{\perp} / H$  (приходящийся на одну частицу плазмы). Иначе говоря, температура плазмы меняется пропорционально  $H$ . Из-за вмороженности магнитного поля  $H \sim n$ , поэтому для давления плазмы получаем  $n T_{\perp} \sim n^2$ , т. е. показатель адиабаты для плазмы в магнитном поле  $\gamma_{\perp} = 2$ , если в процессе изменения состояния плазмы совсем не происходит столкновений. При очень медленных процессах столкновения успевают погасить разность температур вдоль и поперек  $\mathbf{H}$ , вследствие чего показатель адиабаты даже для очень разреженной высокотемпературной плазмы становится равным  $5/3$ .

С такой гидродинамикой (при условии  $t \gg L_p$ ) часто приходится иметь дело в физике высокотемпературной плазмы, в магнитосфере Земли и т. п.

## § 2.6. Колебания и волны в плазме с магнитным полем

Упругие свойства плазмы, помещенной в магнитном поле, вообще говоря, существенно меняются. Это должно следовать из того, что изменяется характер движения частиц плазмы в поле волны, иначе говоря, отклик частиц плазмы на поле волны. С этой точки зрения удобно разделить все типы колебаний и волн плазмы на два класса: 1) волны, в которых частицы совершают колебания практически вдоль направления магнитного постоянного поля, т. е. волны с  $\mathbf{j} \parallel \mathbf{H}_0$ , и 2) волны, в которых главную роль играют токи,

текущие поперек направления внешнего магнитного поля  $\mathbf{j} \perp \mathbf{H}_0$ . Это условное деление само по себе означает, что волновые свойства плазмы в магнитном поле неанзотропны.

Таким образом, в плазме, помещенной в магнитное поле, должны существовать электромагнитная волна с электрическим вектором вдоль  $\mathbf{H}_0$ , т. е. с  $\mathbf{k} \perp \mathbf{H}_0$ , имеющая тот же закон дисперсии (1.45), что и электромагнитные волны в изотропной плазме (обыкновенная волна), а также электростатическая волна с  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{k} \parallel \mathbf{H}_0$  и законом дисперсии (1.36).

Для волн, распространяющихся под углом к магнитному полю, деление на электростатические и электромагнитные, проведенное в первой части книги, уже не является строгим. Ниже показано, что волны являются электростатическими только в пределе больших показателей преломления  $N = kc/\omega \gg 1$ . Дисперсионные характеристики электростатических волн, вообще говоря, менее всего чувствительны к постоянному магнитному полю.

Если частота таких колебаний значительно превышает ларморовскую частоту электронов  $\omega_{He} = eH_0/mc$ , то магнитное поле не успевает оказывать заметное воздействие на быстрое колебательное движение электронов. Условие пренебрежимой малости влияния магнитного поля в этом случае имеет, очевидно, вид  $\omega_{pe} \gg \omega_{He}$ . Для большинства практических приложений это действительно так. Для ионно-звуковых колебаний из условия пренебрежимости влиянием магнитного поля, казалось бы, должно следовать, что  $\omega \gg \omega_{He}$ ,  $\omega_{Hi}$ . Это было бы очень жестким ограничением на величину магнитного поля. Однако в условии  $\omega \gg \omega_{He}$  под частотой  $\omega$  следует понимать истинную частоту ионно-звуковой волны в системе отсчета, движущейся вместе со «средним» электроном  $\omega + kv$ .

Второе слабое значительно больше первого, так как тепловая скорость электронов существенно превышает фазовую скорость ионно-звуковых колебаний. Отсюда можно заключить, что магнитное поле не влияет заметно на ионно-звуковые колебания даже при поперечном распространении, если  $kv_{Te} \gg \omega_{He}$ . В противоположном предельном случае звуковые колебания могут существенно изменить свой характер в присутствии магнитного поля. Так, например, если звук малой частоты распространяется поперек магнитного поля, то каждое сжатие или разрежение плазмы должно приводить к сжатию или разрежению силовых трубок. Магнитное поле сообщает плазме дополнительную упругость, что приводит к увеличению скорости звука. Для частот, значительно меньших ионной ларморовской частоты, скорости распространения этих волн (их принято называть магнитозвуковыми) можно найти, используя соотношение  $c_s = \sqrt{\partial p / \partial \rho}$ , в котором, однако, для  $p$  нужно взять сумму давления плазмы и давления магнитного поля  $p_m = H^2/8\pi$ . При дифференцировании надо учесть, что вследствие замороженности магнитное поле  $H$  пропорционально  $\rho$ . Следовательно,  $\partial H / \partial \rho = H/\rho$  и

$$\partial p_m / \partial \rho = H^2 / 4\rho. \quad (2.73)$$

Определяя давление плазмы, следует учесть, что при медленных звуковых колебаниях ( $\omega \ll \omega_{Hi}$ ) в бесстолкновительной плазме у каждой частицы отношение  $W_{\perp}/H$  сохраняется постоянным. Следовательно, «температура»  $T_{\perp}$ , определяющая среднее значение кинетической энергии для движения перпендикулярно к силовым линиям, должна при звуковых колебаниях изменяться пропорционально  $H$ . Пусть  $p$  обозначает давление плазмы. Оно равно  $n(T_i + T_e)$ . Эта величина пропорциональна  $\rho H$ , а так как  $H \sim p$ , то давление должно быть пропорционально  $\rho^2$ . Следовательно,

$$\partial p / \partial \rho = 2p / \rho = 2(T_i + T_e) / m_i. \quad (2.73a)$$

Пользуясь (2.73) и (2.73a), можно написать следующее выражение для скорости магнитозвуковых волн:

$$c_{\text{эм}}^2 = 2(T_i + T_e) / m_i + H^2 / 4\pi\rho. \quad (2.74)$$

В тех случаях, когда газокинетическое давление плазмы значительно меньше магнитного давления (такую плазму иногда называют «холодной»), в выражении (2.74) можно пренебречь первым членом, и скорость звуковых волн оказывается совпадающей с так называемой альвеновской скоростью  $v_A = H / \sqrt{4\pi\rho}$ .

Разумеется, полученные из наглядных соображений свойства низкочастотных магнитозвуковых колебаний можно было бы доказать прямыми вычислениями, линеаризуя уравнения магнитной гидродинамики, подобно тому как это делалось при рассмотрении колебаний плазмы в гидродинамическом приближении. Такие выкладки оказываются необходимыми, если интересоваться свойствами магнитного звука при частотах, сравнимых или превышающих  $\omega_{Hi}$ . В приближении «холодной» плазмы, т. е. когда тепловое движение ионов и электронов в волне, распространяющейся поперек магнитного поля, не учитывается, выкладки оказываются несложными. Прежде всего запишем линеаризованные уравнения движения ионов и электронов в поле волны сжатия:

$$\left. \begin{aligned} H_z &= H_0 + H_z \exp(-i\omega t + ikx); \\ E &= (E_x; E_y; 0) \exp(-i\omega t + ikx); \\ -m_i i\omega u_{xi} &= eE_x + (e/c) u_{yi} H_0; \\ u_{ye} &= -cE_x/H_0 + i(\omega/\omega_{He})(cE_y/H_0); \\ m_i i\omega u_{yi} &= eE_y - (e/c) u_{xi} H_0; \\ u_{xe} &= cE_y/H_0 + (i\omega/\omega_{He})(cE_x/H_0). \end{aligned} \right\} \quad (2.75)$$

Далее учтем уравнения Максвелла для компонент поля волны

$$\left. \begin{aligned} ikE_y &= +i(\omega/c)H_z; \\ -ikH_z &= (4\pi/c)n_e e(u_{yi} - u_{ye}). \end{aligned} \right\} \quad (2.76)$$

Считая плазму квазинейтральной ( $n_i = n_e = n$ ), нетрудно прийти к выводу, что  $u_{xi} = u_{xe} = u_x$ , а уравнение непрерывности принимает

вид

$$-i\omega n + iku_x n_0 = 0. \quad (2.77)$$

Дисперсионное уравнение имеет вид

$$\omega^2/k^2 = (H^2_0/4\pi\rho_0) (\omega^2_{pe}/c^2) / (k^2 + \omega^2_{pe}/c^2)$$

(в пренебрежении поправками порядка  $m_e/m_i$ ).

Фазовая скорость от значения  $H/\sqrt{4\pi\rho_0}$  при малых частотах с ростом  $\omega$  уменьшается до нуля при частоте  $(\omega_{He}\omega_{Hi})^{1/2}$ . Диспер-

сионная кривая для этого типа колебаний для наглядности показана на рис. 2.13. Отклонения от линейного закона дисперсии начи-

нают существенно проявляться при  $k \rightarrow \omega_{pe}/c$ . Закон дисперсии магнитного звука по форме напоминает зависимость  $\omega(k)$  для ионного звука. Но вместо дебаевского радиуса здесь присутствует характерная длина  $c/\omega_{pe}$ , предельно возможной является частота  $(\omega_{Hi}\omega_{He})^{1/2}$ . Волновые процессы при частотах, близких к гибридной, вообще играют важную роль в физике плазмы. В частности, в магнитозвуковой

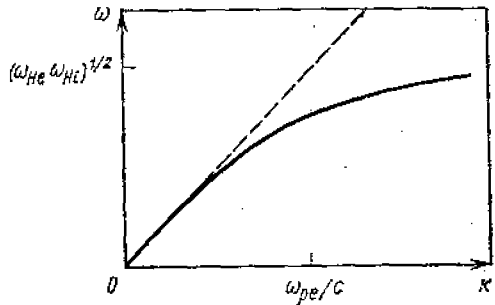


Рис. 2.13. Дисперсионная кривая магнитозвуковых волн  $\mathbf{K} \perp \mathbf{H}_0$

волне при  $\omega \rightarrow (\omega_{Hi}\omega_{He})^{1/2}$  кинетическая энергия колебательного движения ионов (продольного, т. е. в направлении распространения звука) сравнивается по порядку величины с кинетической энергией электронов, которую они приобретают в результате электрического дрейфа  $v_y = -cE_x/H_0$  (вдоль оси  $y$ !).

Все это справедливо для плазмы в не слишком сильном магнитном поле  $H^2/8\pi \ll n_0 m_e c^2$ . В такой плазме состояние в магнитозвуковой волне оказывается квазинейтральным. Однако при очень сильных магнитных полях

$$H^2_0/8\pi \gg n_0 m_e c^2 \quad (2.78)$$

для высоких частот становится существенным отступление от квазинейтральности. Закон дисперсии для таких колебаний имеет вид (опять-таки при пренебрежении тепловым движением)

$$\omega^2/k^2 = (H^2_0/4\pi\rho_0) \left( \frac{4\pi\rho_0}{H^2_0} \omega^2_{pi} / \left( k^2 + \frac{4\pi\rho_0}{H^2_0} \omega^2_{pi} \right) \right). \quad (2.79)$$

Фазовая скорость стремится к нулю при ионной ленгмюровской частоте ( $\omega \rightarrow \omega_{pi}$ ). Характерная длина, при которой становится существенным отклонение от линейного закона дисперсии, есть  $H_0 m_i / 4\pi\rho_0 e$ .

Тепловое движение частиц, не учтенное в проведенном рассмотрении, сделало бы все вычисления весьма громоздкими, так как пришлось бы заниматься кинетической теорией. Иногда учет теплового движения не только приводит к количественным поправкам, но и дает качественно новые физические результаты. Только так, например, можно получить характерные типы колебаний плазмы, распространяющиеся почти поперек магнитного поля с частотами, близкими к целым кратным циклотронных частот ионов и электронов. Эти типы колебаний называют модами Бернштейна.

Новые типы колебаний могут возникать в плазме и при распространении вдоль магнитного поля. Наиболее важными среди них являются магнитогидродинамические альвеновские волны. Вывод свойств этих волн с помощью уравнений магнитной гидродинамики не представляет трудности.

Пусть направление оси  $z$  совпадает с направлением вектора постоянного магнитного поля  $H_0$ . Альвеновские волны распространяются вдоль  $H_0$  и являются поперечными, т. е. соответствующие им компоненты скорости плазмы и колебаний магнитного поля перпендикулярны к  $H_0$ , а следовательно, и к направлению распространения волны. При таких поперечных смещениях плазмы, первоначально однородной, не возникает ни сжатий, ни разрежений, т. е. плотность плазмы, а также давление в процессе распространения альвеновских волн остаются постоянными. В этом случае уравнение Эйлера магнитной гидродинамики (2.60) с учетом (2.61) принимает вид

$$\rho_0 \frac{d\mathbf{u}}{dt} = -\text{grad } H^2 / 8\pi + (1/4\pi) (\mathbf{H} \text{ grad}) \mathbf{H}. \quad (2.80)$$

Линеаризация означает, что нужно отбросить член с магнитным давлением (как квадратично малый). Второе слагаемое в правой части дает  $(1/4\pi) (H_0 \partial / \partial z) \mathbf{H}$ . Итак, линеаризованное уравнение движения имеет вид

$$\rho_0 \frac{d\mathbf{u}}{dt} = (1/4\pi) (H_0 \partial / \partial z) \mathbf{H}. \quad (2.81)$$

В качестве уравнения для магнитного поля волны возьмем уравнение (2.70), в котором член  $\text{rot}[\mathbf{u} \times \mathbf{H}]$  для случая альвеновских волн упрощается:

$$\text{rot}[\mathbf{u} \times \mathbf{H}_0] \equiv H_0 \frac{d\mathbf{u}}{dz},$$

а само уравнение принимает вид

$$\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = H_0 \frac{d\mathbf{u}}{dz} + (c^2/4\pi\sigma) (\partial^2 \mathbf{H} / \partial z^2). \quad (2.82)$$

В пренебрежении магнитной вязкостью уравнения (2.81) и (2.82) легко объединить, исключив любую из переменных  $\mathbf{u}$  или  $\mathbf{H}$ . В итоге получается обычное волновое уравнение

$$1/v_A^2 (\partial^2 \mathbf{u} / \partial t^2) = \partial^2 \mathbf{u} / \partial z^2 \quad (2.83)$$

с линейным законом дисперсии  $\omega = kv_A$ . Учет магнитной вязкости приводит, как нетрудно увидеть, к затуханию волны. Роль упругой возвращающей силы в магнитогидродинамических волнах играет

сила натяжения силовых линий. Поэтому удобно представить альвеновские волны как колебания упругих нитей (силовых линий магнитного поля), нагруженных плазмой (из-за эффекта вмороженности).

Квадрат показателя преломления  $N^2 = k^2 c^2 / \omega^2$ , соответствующий альвеновской волне, равен  $4\pi n t_i c^2 / H^2$ . Ему можно дать наглядное толкование на языке дрейфового движения заряженных частиц в скрещенных электрическом и магнитном полях (см. § 2.1). Движение со скоростью  $c[\mathbf{E} \times \mathbf{H}] / H^2$  не приводит к электрическому току, так как и ионы, и электроны движутся вместе. Дрейфовое движение в следующем порядке приводит к смещению зарядов в направлении электрического поля [см. формулу (2.31)]:  $x = -(e / m \omega^2 n) E_x$ .

Теперь диэлектрическую проницаемость можно выразить через электрический момент  $P$  единицы объема  $\epsilon = 1 + 4\pi P / E$ , где  $P = -n e x$ . Пренебрегая смещением электронов (оно меньше ионного в  $m_i / m_e$  раз), получаем диэлектрическую проницаемость в области низких частот  $4\pi n t_i c^2 / H^2$ . Соответствующий показатель преломления  $\sqrt{\epsilon}$  для подавляющего большинства плазм чрезвычайно велик. Таким образом, магнитогиродинамические волны представляют собой просто замедленные поперечные электромагнитные колебания. В очень разреженной плазме они плавно переходят в обычные электромагнитные волны в вакууме. Однако в нашей магнитогиродинамической модели не учтен ток смещения, и поэтому такой предельный переход невозможен.

Величина альвеновской скорости не содержит характеристик теплового движения плазмы. С этим обстоятельством связана замечательная особенность магнитогиродинамических волн: их свойства универсальны, где бы они ни распространялись, в проводящей ли жидкости, помещенной в магнитное поле (С. Лундквист в своих классических опытах генерировал волны в жидкой ртути), или в бесстолкновительной плазме. В последнем случае, разумеется, теряет смысл понятие магнитной вязкости и затухание может быть вызвано эффектами бесстолкновительного взаимодействия волна — частица, примером которого в отсутствие магнитного поля является резонанс Ландау.

В бесстолкновительной плазме появляется эффект аномальной дисперсии и двойного лучепреломления, когда частота волны по мере увеличения становится сравнимой с ларморовской частотой ионов.

Самое общее описание волн в такой неизотропной среде, как плазма в магнитном поле, основано на введении тензора диэлектрической проницаемости. Из уравнения Максвелла легко можно получить связь между тензорами диэлектрической проницаемости и проводимости:

$$\epsilon_{ik} = \delta_{ik} + i(4\pi / \omega) \sigma_{ik}. \quad (2.84)$$

Это соотношение — тензорное обобщение рассмотренного в ч. 1 соотношения между диэлектрической проницаемостью и проводимостью

мостью плазмы. Компоненты тензора проводимости  $\sigma_{ik}$  — коэффициенты в тензорном обобщении закона Ома:

$$j_i = \sigma_{ik} E_k. \quad (2.85)$$

Формула (2.84) получена для плоской волны, пропорциональной  $\exp(-i\omega t + i\mathbf{k}\mathbf{r})$ .

В приближении «холодной плазмы» компоненты тензора диэлектрической проницаемости зависят только от частоты (временная дисперсия). Для получения их конкретного вида необходимо с помощью уравнений двухжидкостной гидродинамики (2.58) и (2.59) определить токи, которые инициируются в плазме полем колебаний.

Пусть плазма помещена в однородное внешнее магнитное поле  $\mathbf{H}_0 \parallel Oz$ , другие внешние поля отсутствуют. Плазму будем считать однородной и пренебрежем столкновениями и тепловым движением. Последнее означает, что в уравнениях (2.58) и (2.59) можно опустить слагаемые с компонентами тензора давления. Наконец, предположим, что в равновесии в плазме отсутствуют какие-либо потоки  $\mathbf{u}_0 = 0$ . В этом приближении уравнения двухжидкостной гидродинамики для электронов и ионов ( $\alpha = e, i$ ) имеют вид

$$-i\omega u_\alpha = (e_\alpha/m_\alpha) E + (e_\alpha/m_\alpha c) [\mathbf{u}_\alpha \times \mathbf{H}_0]. \quad (2.86)$$

Решение этих уравнений имеет вид

$$\begin{aligned} u_{x\alpha} &= (e_\alpha/m_\alpha) (\omega^2 - \omega_{H\alpha}^2)^{-1} (i\omega E_x - \omega_{H\alpha} E_y); \\ u_{y\alpha} &= (e_\alpha/m_\alpha) (\omega^2 - \omega_{H\alpha}^2)^{-1} (i\omega E_y + \omega_{H\alpha} E_x); \\ u_{z\alpha} &= -(e_\alpha/i\omega m_\alpha) E_z; \\ \omega_{H\alpha} &= e_\alpha H_0/m_\alpha c. \end{aligned} \quad (2.87)$$

Определяя с помощью этих соотношений ток в плазме

$$\mathbf{j} = \sum_\alpha e_\alpha n_\alpha \mathbf{u},$$

получаем с учетом (2.84) и (2.85) следующий тензор диэлектрической проницаемости:

$$\epsilon = \begin{pmatrix} \epsilon_{11} & \epsilon_{12} & 0 \\ \epsilon_{21} & \epsilon_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_{33} \end{pmatrix}, \quad (2.88)$$

$$\text{где } \epsilon_{11} = 1 - \sum_\alpha \frac{\omega_{p\alpha}^2}{\omega^2 - \omega_{H\alpha}^2},$$

$$\epsilon_{12} = -\epsilon_{21} = -i \sum_\alpha \frac{\omega_{p\alpha} \omega_{H\alpha}}{\omega (\omega^2 - \omega_{H\alpha}^2)},$$

$$\epsilon_{33} = 1 - \sum_\alpha \frac{\omega_{p\alpha}^2}{\omega^2}.$$

Таким образом, магнитное поле существенным образом влияет на диэлектрические свойства плазмы, приводя, во-первых, к анизотропии направлений вдоль и поперек поля ( $\epsilon_{11} \neq \epsilon_{33}$ ), а во-вторых, к появлению недиагональных компонент тензора диэлектрической проницаемости; соответствующих вращению вектора электрического поля волны в перпендикулярной магнитному полю плоскости (эффект Фарадея).

Читатель уже знает, что в плазме без магнитного поля существуют три ветви колебаний: высокочастотные колебания плотности заряда (ленгмюровские волны), электромагнитные волны и ионный звук. Очень важное свойство плазмы в магнитном поле состоит в том, что в ней, вообще говоря, уже не существуют независимые продольные и поперечные волны: колебания плотности заряда инициируют в плазме магнитное и вихревое электрическое поля.

Действительно, пусть в плазме под углом к магнитному полю распространяется продольная волна. В отличие от изотропного случая анизотропия тензора диэлектрической проницаемости приводит к тому, что вектор тока не будет коллинеарен вектору электрического поля. Наличие перпендикулярной к направлению распространения компоненты тока  $j^t$  приводит, как следует из уравнения Максвелла

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = (1/c) (\partial \mathbf{E}^t / \partial t) + (4\pi/c) j^t, \quad (2.89)$$

к возбуждению магнитного и вихревого электрического полей, а следовательно, к связи продольных колебаний плазмы с электромагнитными. Именно из-за этого обстоятельства исследование высокочастотных колебательных и волновых свойств плазмы в магнитном поле существенно усложняется. Однако в пределе очень больших показателей преломления плазмы  $N \gg 1$  можно приближенно рассматривать чисто продольные колебания в магнитном поле, поскольку связанные с ними вихревые электрические поля будут пренебрежимо малы.

Действительно, из уравнения Максвелла

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = - (1/c) (\partial \mathbf{H} / \partial t) \quad (2.90)$$

имеем следующую оценку для вихревого электрического поля:

$$E^t \sim (\omega/kc) H, \quad (2.91)$$

или с учетом уравнения  $\operatorname{rot} \mathbf{H} = 4\pi j^t/c$

$$E^t \sim (4\pi\omega/k^2c^2) j^t. \quad (2.92)$$

Кроме того, используя уравнение Пуассона

$$\operatorname{div} \mathbf{E}^t = 4\pi\rho, \quad (2.93)$$

имеем с учетом уравнения непрерывности

$$E^t \sim (4\pi/\omega) j^t \sim (j^t/j^l) (k^2c^2/\omega^2) E^l. \quad (2.94)$$



Таким образом, даже при сильно выраженной анизотропии  $j^i \sim j^i$  для плазмы с большим показателем преломления ( $N \equiv kc/\omega \gg 1$ )  $E^i \ll E^i$ .

Предполагая  $N \gg 1$ , рассмотрим чисто продольные (электростатические) колебания плазмы в магнитном поле. Введя, как обычно, электростатический потенциал колебаний  $E = -\nabla\phi$ , запишем уравнение Пуассона в следующем виде:

$$(\partial^2\phi/\partial x_i\partial x_j)\epsilon_{ij} = 0. \quad (2.95)$$

Для плоской волны с учетом конкретного вида тензора  $\epsilon_{ij}$  из (2.95) имеем следующее дисперсионное уравнение:

$$1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2} \cos^2\theta - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2 - \omega_{He}^2} \sin^2\theta - \frac{\omega_{pi}^2}{\omega^2} \cos^2\theta - \frac{\omega_{pi}^2}{\omega^2 - \omega_{Hi}^2} \sin^2\theta = 0. \quad (2.96)$$

Здесь  $\theta$  — угол между направлением волнового вектора и магнитным полем. В изотропной плазме дисперсия частоты электростатических (ленгмюровских) колебаний была связана

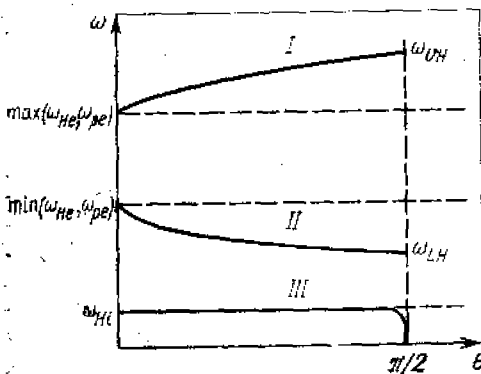


Рис. 2.14. Ветви электростатических колебаний плазмы в магнитном поле

только с тепловым движением. Уже весьма слабое магнитное поле  $\omega_{He}^2/\omega_{pe}^2 \gg \gg 3k^2r_D^2$  меняет дисперсию электростатических колебаний и тем самым приводит к зависимости частоты этих колебаний от угла  $\theta$ . Чтобы не тратить лишних слов на описание дисперсионных характеристик, приведем результаты решения алгебраического уравнения (2.96) в виде графиков  $\omega = \omega(\theta)$  (рис. 2.14).

В плазме, помещенной в магнитное поле, существуют три ветви электростатических колебаний. Наиболее высокочастотная из них (при  $\omega_{pe} > \omega_{He}$ ) соответствует ленгмюровским колебаниям, при  $\theta \rightarrow 0$  частота этой волны совпадает с плазменной  $\omega_{pe}$ , с ростом  $\theta$  частота этой ветви растет вплоть до так называемой частоты верхнего гибридного резонанса:

$$\omega_{UH} = (\omega_{pe}^2 + \omega_{He}^2)^{1/2}. \quad (2.97)$$

Частота второй ветви с ростом  $\theta$  убывает от  $\omega_{He}$  при  $\theta=0$  до частоты нижнего гибридного резонанса

$$\omega_{LH} = \omega_{pi} / (1 + \omega_{pe}^2/\omega_{He}^2)^{1/2} \quad (2.98)$$

при  $\theta = \pi/2$ . Наконец, частота третьей, самой низкочастотной ветви, для которой существенно движение ионов, совпадает с ионной циклотронной  $\omega_{ci}$  вплоть до углов, весьма близких к  $\pi/2$ , а именно  $\pi/2 - \theta \ll (m_e/m_i)^{1/2}$ .

Исследование дисперсионных свойств волн в плазме, помещенной в магнитное поле, при произвольных значениях показателя преломления — довольно громоздкая задача, выходящая за рамки настоящей книги. Ограничимся рассмотрением дисперсионных характеристик волн, распространяющихся вдоль или поперек магнитного поля.

При продольном распространении ( $k_{\perp} = 0$ ) в качестве элементарных мод колебаний естественно взять волны с круговой поляризацией. Это вызвано тем, что в волне, распространяющейся в такой плазме, практически на всех частотах существует ток Холла, приводящий к повороту вектора электрического поля. В качестве двух линейно независимых мод колебаний с круговой поляризацией следует рассматривать волны, у которых электрический вектор вращается соответственно в сторону вращения электронов и ионов в магнитном поле. Для каждой из этих волн удобно ввести комбинацию компонент поля  $E_{\pm} = E_x \pm iE_y$  (такие же комбинации вводятся для других физических величин  $H_{\pm}$ ,  $j_{\pm}$  и т. п.). Поскольку  $E_{\pm} \sim \exp(ikz - i\omega t)$ , то очевидно, что в волне  $E_+$   $E_x \sim \cos(kz - \omega t)$ ,  $E_y \sim \sin(kz - \omega t)$  и электрический вектор вращается по часовой стрелке, т. е. в сторону вращения ионов (рис. 2.15). Аналогичным образом для волны  $E_-$ :  $E_x \sim \cos(kz - \omega t)$ ,  $E_y \sim -\sin(kz - \omega t)$  и электрический вектор вращается в сторону вращения электронов.

Для волн круговой поляризации уравнение Максвелла  $\text{rot } \mathbf{E} = - (1/c) (\partial \mathbf{H} / \partial t)$  записывается в следующем виде:

$$H_{\pm} = \mp i(kc/\omega) E_{\pm}. \quad (2.99)$$

Аналогично другие уравнения Максвелла  $\text{rot } \mathbf{H} = (1/c) \times (\partial \mathbf{D} / \partial t)$  с помощью тензора диэлектрической проницаемости (2.88) можно представить в виде

$$H_{\pm} = \pm i(\omega/kc) \epsilon_{\pm} E_{\pm}. \quad (2.100)$$

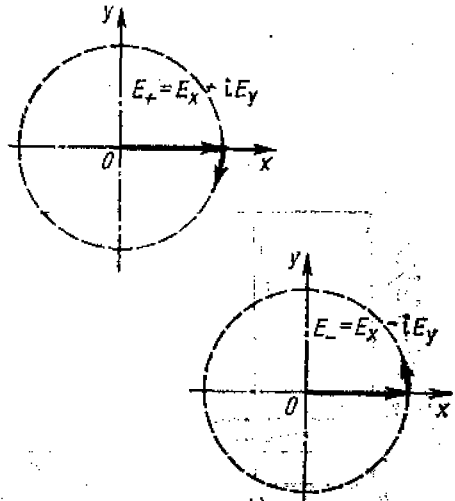


Рис. 2.15. Вращение вектора электрического поля в обыкновенной и необыкновенной циркулярно-поляризованных волнах

где комбинации  $\epsilon_+ = \epsilon_{11} - i\epsilon_{12}$ ,  $\epsilon_- = \epsilon_{11} + i\epsilon_{12}$  играют роль диэлектрической проницаемости для электромагнитных волн с различным направлением вращения вектора поляризации.

Используя формулу (2.88) для компонент тензора диэлектрической проницаемости, нетрудно записать дисперсионные уравнения для волн с круговой поляризацией в следующем виде:

$$k^2 c^2 / \omega^2 = 1 - \omega_{pe}^2 / \omega (\omega \pm \omega_{He}) - \omega_{pi}^2 / \omega (\omega \mp \omega_{Hi}). \quad (2.101)$$

На рис. 2.16 приведен график изменения с частотой показателя преломления  $N(\omega)$  для обеих волн с круговой поляризацией (индекс  $\alpha$  относится к обыкновенной волне  $E_+$ , индекс  $\beta$  — к необыкновенной  $E_-$ ). В области малых частот обе кривые сливаются, что соответствует переходу к уже изученным выше магнитогидродинамическим волнам (альвеновской и магнитозвуковой) с фазовой скоростью  $v_A$ . Им соответствует показатель преломления

$$N = ck/\omega = c/v_A = (4\pi n_0 m_i c^2 / H_0^2)^{1/2}.$$

Характер волнового процесса изменяется при приближении  $\omega$  к  $\omega_{Hi}$ . Не вдаваясь в детали, остановимся только на качественной

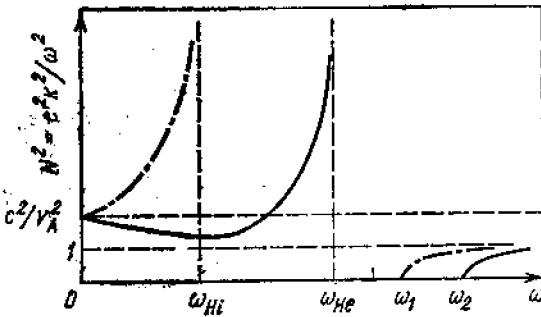


Рис. 2.16. Квадрат показателя преломления  $N^2 = c^2 k^2 / \omega^2$  как функция частоты для электромагнитных волн, распространяющихся вдоль магнитного поля:

сплошная кривая — необыкновенная волна (электрический вектор поляризован в направлении вращения электронов); штрих-пунктир — обыкновенная волна (электрический вектор поляризован в направлении вращения ионов)

стороне явлений, которые определяют основные свойства поперечных электромагнитных волн в плазме при  $\omega \sim \omega_{Hi}$ . Простейшую линейно поляризованную волну, распространяющуюся вдоль направления постоянного магнитного поля, можно представить в виде суперпозиции двух волн, поляризованных по кругу с противоположными направлениями вращения вектора поляризации. Если  $\omega \ll \omega_{Hi}$ , то обе волны с противоположными направлениями круговой поляризации распространяются с одинаковой скоростью. Однако по мере приближения к ларморовской частоте ионов положение меняется. Действительно, та из волн, электрический вектор которой вращается вокруг постоянного поля в направлении, совпадающем с направлением ларморовского вращения ионов, должна испытывать в области, где  $\omega \approx \omega_{Hi}$ , явление аномальной дисперсии, возникающее вследствие циклотронного резонанса ионов. Фазовая скорость этой волны (ее аналог в оптике принято называть обыкновенной волной) резко уменьшается вблизи  $\omega_{Hi}$ . Напротив, фа-

званная скоростью так называемой необыкновенной волны, которой соответствует противоположное направление вращения электрического вектора, в области частот, близких к  $\omega_{H_1}$ , растет при увеличении  $\omega$ . Поэтому в области значений  $\omega$ , близких к  $\omega_{H_1}$ , в плазме должно наблюдаться «двойное лучепреломление». Волны такого типа играют важную роль в физике околоземной плазмы. Они легко генерируются в естественных условиях и распространяются в магнитосфере Земли на очень большие расстояния вдоль силовых линий геомагнитного поля. Их часто называют ионными (или электронными) свистами — «свистящими атмосфериками».

При очень больших значениях частот, в области, где  $\omega$  становится сравнимой с ларморовской частотой электронов  $\omega_{He}$ , должна наблюдаться аномальная дисперсия для необыкновенной волны, электрический вектор которой вращается вокруг магнитного поля в ту же сторону, что и электроны плазмы. При частотах  $\omega \gg \omega_{H_1}$  ионы практически не участвуют в волновом движении, т. е. волна становится чисто электронной. В металлах и полупроводниках, помещенных в магнитное поле, такие волны называют геликонами.

Если частота этих волн мала по сравнению с  $\omega_{He}$ , то закон их дисперсии имеет вид

$$\omega = (c^2 k^2 / \omega_{pe}^2) \omega_{He}. \quad (2.102)$$

В такой волне основное движение электронов — дрейф в скрещенных  $E$ - и  $H_0$ -полях, который приводит к возникновению холловского тока, перпендикулярного к электрическому полю. Затухание геликона в металлах и полупроводниках связано со столкновениями. Столкновения приводят к возникновению компоненты тока вдоль электрического поля, которая мала по сравнению с холловской в отношении  $v/\omega_{He}$ . Соответственно этому столь же мало затухание геликона:  $\gamma/\omega \sim v/\omega_{He}$ . Именно благодаря этому обстоятельству возможно распространение геликонов в плотной металлической плазме с большими частотами столкновений  $v \sim (10^9 + 10^{10}) \text{ с}^{-1}$  при использовании сильных магнитных полей  $H_0 \sim (1 + 2) \cdot 10^4 \text{ Э}$ .

Аномальная дисперсия на резонансных частотах всегда сопровождается аномальным поглощением (т. е. резким увеличением затухания волны). Это поглощение обусловлено тем, что при приближении частоты обыкновенной волны к  $\omega_{H_1}$  ионы все время находятся в резонансе с электрическим полем волны и, ускоряясь под действием этого поля, непрерывно отбирают у него энергию. Это явление используется в так называемом циклотронном методе нагрева плазмы. С необыкновенной волной то же самое происходит при  $\omega \approx \omega_{He}$ .

При частотах, больших резонансных, вплоть до так называемых частот отсечки,  $\omega_1$  — для обыкновенной,  $\omega_2$  — для необыкновенной, находятся области непрозрачности, в которых распространение электромагнитной волны невозможно. При частотах отсечки  $k$

обращается в нуль, и эти частоты имеют смысл пороговых частот, выше которых вновь становится возможным распространение электромагнитных волн. В изотропной плазме пороговая частота совпадает с плазменной  $\omega_{pe}$ . Из дисперсионного уравнения (2.101) нетрудно получить формулы для частот отсечек:

$$\begin{aligned}\omega_1 &= -\omega_{He}/2 + \sqrt{\omega_{He}^2/4 + \omega_{pe}^2}, \\ \omega_2 &= \omega_{He}/2 + \sqrt{\omega_{He}^2/4 + \omega_{pe}^2}\end{aligned}\quad (2.103)$$

Две линейные независимые волны — обыкновенную и необыкновенную — можно ввести и в случае поперечного распространения  $k_{\perp} \neq 0$ . Однако смысл этих волн уже иной. В обыкновенной волне электрический вектор параллелен внешнему магнитному полю, а магнитный вектор перпендикулярен к плоскости, в которой лежат векторы  $\mathbf{k}$  и  $\mathbf{H}_0$ . Колебания заряженных частиц в такой волне происходят в направлении магнитного поля, следовательно, дисперсия волны не зависит от напряженности поля и определяется формулой (1.35).

Напротив, в необыкновенной волне вектор электрического поля лежит в плоскости, перпендикулярной к внешнему магнитному полю, а магнитное поле волны параллельно  $\mathbf{H}_0$ . Направляя  $\mathbf{k}$  вдоль оси  $x$ , а  $\mathbf{H}_0$  по оси  $z$ , получаем с помощью уравнений Максвелла следующие уравнения для компонент  $E_x, E_y$ :

$$\left. \begin{aligned}\epsilon_{11}E_x + i\epsilon_{12}E_y &= 0; \\ (c^2k^2/\omega^2)E_y &= \epsilon_{11}E_y - i\epsilon_{12}E_x.\end{aligned}\right\} \quad (2.104)$$

Отсюда находим дисперсионное уравнение для необыкновенной электромагнитной волны

$$c^2k^2/\omega^2 = (\epsilon^2_{11} - \epsilon^2_{12})/\epsilon_{11}. \quad (2.105)$$

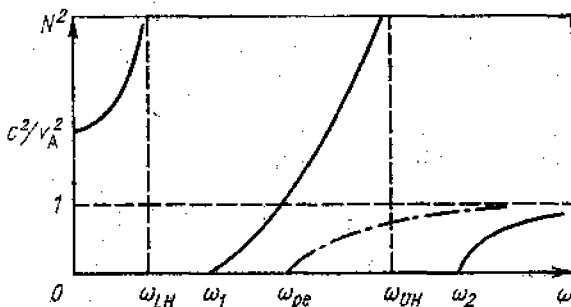


Рис. 2.17. Квадрат показателя преломления  $N^2 = c^2k^2/\omega^2$  как функция частоты при поперечном распространении электромагнитных волн:

сплошная кривая — необыкновенная волна (электрический вектор перпендикулярен к плоскости, содержащей векторы  $\mathbf{k}$  и  $\mathbf{H}_0$ ); штрихпунктир — обыкновенная волна (электрический вектор параллелен  $\mathbf{H}_0$ )

Результаты решения дисперсионных уравнений для обыкновенной и необыкновенной волн при поперечном распространении приведены на рис. 2.17. Обыкновенная волна распространяется в плазме при частотах выше  $\omega_{pe}$ . Необыкновенная волна имеет две резонансные частоты, при которых  $N \rightarrow \infty$ . Это уже полученные ранее

в электростатическом приближении частоты верхнего (2.97) и нижнего (2.98) гибридных резонансов, т. е. собственные частоты электростатических колебаний при  $\theta = \pi/2$ . Для необыкновенной волны имеются, кроме того, две частоты отсечки ( $N \rightarrow 0$ ). Естественно, они оказываются такими же, как частоты отсечки  $\omega_1$  и  $\omega_2$  при продольном распространении.

### § 2.7. Кинетическая теория волн в плазме

Строгая теория волн в бесстолкновительной плазме должна базироваться на решении линеаризованных кинетических уравнений для ионов и электронов совместно с уравнениями Максвелла, подобно тому как это показано в ч. I для более простого случая. Как уже известно читателю, кинетическое рассмотрение позволяет не только получить дисперсионные свойства колебаний и волн в плазме, но и исследовать их взаимодействие с резонансными частицами, т. е. процессы бесстолкновительного затухания и нарастания волн. Хотя магнитное поле и делает выкладки более громоздкими, мы приведем кинетическую теорию волн альвеновского типа для простейшего случая продольного распространения  $\mathbf{k} = \{0, 0, k\}$ .

Ограничимся анализом колебаний достаточно высокой частоты, в которых принимают участие только электроны, и соответственно исследуем необыкновенную электромагнитную волну с электрическим вектором, вращающимся в направлении вращения электронов. После несложных стандартных вычислений получим следующее уравнение для электрического поля волны:

$$(c^2 k^2 / \omega^2 - 1) E_- = i (4\pi / \omega) j_- \quad (2.106)$$

В предыдущем параграфе мы описывали отклик плазмы на распространяющуюся в ней волну с помощью гидродинамического тензора диэлектрической проницаемости. В уравнении (2.106) вместо этого тензора введен ток  $j_-$ , инициированный волной в плазме, для вычисления которого обратимся к решению кинетического уравнения. Очевидно, что

$$j_- = -e \int v_{\perp} \exp(-i\varphi) f_1 dv. \quad (2.107)$$

Здесь  $f_1$  — возмущение равновесной функции распределения, вызванное распространяющейся в плазме волной;  $\varphi$  — азимутальный угол в пространстве скоростей (рис. 2.18).

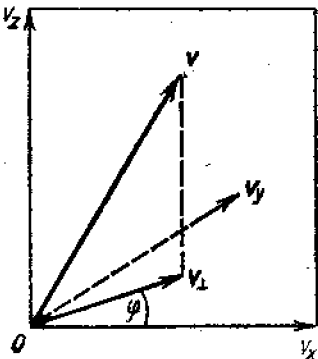


Рис. 2.18. Цилиндрические координаты в пространстве скоростей, использованные в кинетическом уравнении (2.108)

Решим теперь кинетическое уравнение (2.48). Для этого представим функцию распределения в виде  $f = f_0 + f_1$ . Величина  $f_1$  пропорциональна  $\exp\{ikz - i\omega t\}$ , для нее линейризованное кинетическое уравнение записывается в следующем виде:

$$\begin{aligned}
 & -i(\omega - kv_z)f_1 - (e/m_e c) [\mathbf{v} \times \mathbf{H}_0] \frac{\partial f_1}{\partial \mathbf{v}} - \\
 & - (e/m_e) \left( E + \frac{1}{c} [\mathbf{v} \times \mathbf{H}] \right) \partial f_0 / \partial \mathbf{v} = 0. \quad (2.108)
 \end{aligned}$$

Используя полярные координаты в пространстве скоростей с осью вдоль постоянного магнитного поля  $v_x = v_{\perp} \cos \varphi$ ;  $v_y = v_{\perp} \sin \varphi$ , нетрудно доказать, что слагаемое

$-(e/m_e c) [\mathbf{v} \times \mathbf{H}_0] \partial f_1 / \partial \mathbf{v} = (eH_0/m_e c) (v_x \partial f_1 / \partial v_y - v_y \partial f_1 / \partial v_x)$  переходит в  $\omega_H \partial f_1 / \partial \varphi$ . Что касается двух последних слагаемых, то, используя вытекающее из уравнений Максвелла соотношение между амплитудой электрического и магнитного полей волны  $\mathbf{H} = (c/\omega) [\mathbf{k} \times \mathbf{E}]$ , можно представить их в следующем виде:

$$\begin{aligned}
 & - (e/m_e) (E_x \cos \varphi + E_y \sin \varphi) [(1 - kv_z/\omega) \partial f_0 / \partial v_{\perp} + \\
 & + (kv_{\perp}/\omega) \partial f_0 / \partial v_z].
 \end{aligned}$$

Здесь учтено, что в стационарном состоянии равновесная функция распределения может зависеть только от  $v_{\perp}$ ,  $v_z$ . Подставляя  $E_x$ ,  $E_y$  в виде  $E_x = (E_+ + E_-)/2$ ,  $E_y = (E_+ - E_-)/2i$ , получаем кинетическое уравнение

$$\begin{aligned}
 & -i(\omega - kv_z)f_1 + \omega_H \partial f_1 / \partial \varphi = (e/2m_e) E_- \exp(i\varphi) [(1 - \\
 & - kv_z/\omega) \partial f_0 / \partial v_{\perp} + (kv_{\perp}/\omega) \partial f_0 / \partial v_z]. \quad (2.109)
 \end{aligned}$$

Отметим, что в вынуждающей силе сохранено только слагаемое, пропорциональное  $E_- \exp(i\varphi)$ , с которым связан ненулевой вклад в ток (2.107).

Решение кинетического уравнения (2.109) записывается в виде

$$\begin{aligned}
 f_1 = & -i(e/2m_e) E_- \exp(i\varphi) [(1 - kv_z/\omega) \partial f_0 / \partial v_{\perp} + \\
 & + (kv_{\perp}/\omega) \partial f_0 / \partial v_z] / (kv_z - \omega + \omega_H). \quad (2.110)
 \end{aligned}$$

Вычисляя с помощью  $f_1$  ток (2.107), приходим к следующему дисперсионному уравнению:

$$\begin{aligned}
 c^2 k^2 / \omega^2 - 1 = & - (2\pi e^2 / m_e \omega) \int dv_{\perp} [(1 - kv_z/\omega) \partial f_0 / \partial v_{\perp} + \\
 & + (kv_{\perp}/\omega) \partial f_0 / \partial v_z] / (kv_z - \omega + \omega_H). \quad (2.111)
 \end{aligned}$$

Для получения дисперсионных характеристик электромагнитной волны в холодной плазме и ее декремента затухания разобьем равновесную функцию распределения на две части — функцию

распределения основной массы частиц (тепловых), определяющих дисперсию волны, и функцию распределения небольшой группы резонансных частиц, взаимодействие которых с волной приводит к ее затуханию.

Для электрической волны круговой поляризации, электрический вектор которой вращается в ту же сторону, что и электроны, условие резонансного взаимодействия с электронами имеет вид

$$\omega - k_z v_z = \omega_{He}, \quad (2.112)$$

т. е. частота волны с учетом доплеровского сдвига совпадает с циклотронной частотой. При этом частицы долгое время находятся при одной и той же фазе поля и могут эффективно обмениваться энергией с волной. Условие резонанса (2.112) записано для необыкновенной волны. Для обыкновенной волны аналогичный резонанс имеет место с ионами

$$\omega - k_z v_z = \omega_{Hi}. \quad (2.113)$$

При распространении электромагнитной волны под углом к магнитному полю возможны и другие резонансы. Подробно этот вопрос рассматривается в следующем параграфе.

Пренебрегая вкладом теплового движения в дисперсию волны, интеграл в правой части уравнения (2.111) можно вычислить предельным переходом  $v_z \rightarrow 0$ ,  $v_\perp \rightarrow 0$ . Тогда получим

$$\begin{aligned} \int \frac{v_\perp}{k v_z - \omega + \omega_{He}} \left[ \left( 1 - \frac{k v_z}{\omega} \right) \frac{\partial f_0}{\partial v_\perp} + (k v_\perp / \omega) \frac{\partial f_0}{\partial v_z} \right] dv = \\ = - \frac{1}{\omega - \omega_{He}} \int v_\perp \frac{\partial f_0}{\partial v_\perp} dv = \frac{2n_0}{\omega - \omega_{He}}. \end{aligned}$$

Учтем теперь вклад резонансных частиц, используя символическую запись

$$1/(k v_z - \omega + \omega_H) = \mathcal{P}/(k v_z - \omega + \omega_H) + i\pi\delta(k v_z - \omega + \omega_H),$$

смысл которой был разъяснен ранее. Слагаемое с главным значением вещественно и поэтому приводит только к малой (пропорциональной плотности резонансных частиц) поправке к частоте. Пренебрегая этой поправкой, сохраним в интеграле лишь вклад от  $\delta$ -функции. Вычислив для резонансных частиц интеграл по  $v_z$ , приведем дисперсионное уравнение к виду

$$\begin{aligned} c^2 k^2 - \omega^2 + \omega_p^2 \omega / (\omega - \omega_{He}) = -i\pi \frac{2\pi e^2}{m_e} \frac{\omega}{|k|} \int dv_\perp v_\perp \left[ \left( 1 - \frac{k v_z}{\omega} \right) \frac{\partial f_0}{\partial v_\perp} + \right. \\ \left. + \frac{k v_\perp}{\omega} \frac{\partial f_0}{\partial v_z} \right] \Big|_{v_z = (\omega - \omega_{He})/k}. \quad (2.114) \end{aligned}$$

Если пренебречь правой частью, то это уравнение, естественно, совпадает с дисперсионным уравнением для  $E_-$ -волны, полученным в § 2.6 из гидродинамических уравнений (напомним, что мы рассматриваем высокочастотную ветвь и не учитываем движение ио-



нов). Но кроме частоты при кинетическом рассмотрении может быть получен также и декремент затухания волны.

Из уравнения (2.114) имеем следующую формулу для декремента затухания:

$$\gamma = \frac{2\pi^2 e^2}{m_e} \frac{\omega}{|k|} \frac{1}{\frac{d}{d\omega} (\omega^2 N(\omega))} \times \\ \times \int dv_{\perp} v_{\perp} \left[ \left( 1 - \frac{kv_{\perp}}{\omega} \right) \frac{\partial f_0}{\partial v_{\perp}} + \frac{kv_{\perp}}{\omega} \frac{\partial f_0}{\partial v_z} \right] \Big|_{v_z = (\omega - \omega_{He})/k} \quad (2.115)$$

Для плазмы с максвелловским распределением резонансных частиц по скоростям интеграл по  $v_{\perp}$  в (2.115) легко вычисляется; декремент циклотронного затухания необыкновенной волны в результате взаимодействия с резонансными электронами имеет вид:

$$\gamma = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\omega^2}{\omega_{pe}} \frac{\omega}{|k|} \frac{1}{\frac{d}{d\omega} (\omega^2 N^2(\omega))} \left( \frac{m_e}{T} \right)^{1/2} \exp \left\{ -\frac{m_e}{2T} \frac{(\omega - \omega_{He})^2}{k^2} \right\}. \quad (2.116)$$

Как уже отмечалось выше, область аномального поглощения находится при частотах, близких к циклотронной:

$$|\omega - \omega_{He}| \sim kv_{Te}.$$

В этой области основная масса частиц плазмы попадает в резонанс с волной. С ростом расстройки  $|\omega - \omega_{He}|$  число резонансных частиц экспоненциально уменьшается.

Уже известно, что когда функция распределения резонансных частиц отличается от максвелловской (например, если резонансные частицы образуют пучок), их взаимодействие с волной может приводить к нарастанию ее амплитуды, т. е. к неустойчивости. Так же, как в случае ленгмюровской волны, пучковая неустойчивость циклотронной волны может быть двух типов — гидродинамической и кинетической.

Рассмотрим гидродинамическую неустойчивость циклотронной волны, возникающую при взаимодействии с плазмой моноэнергетического электронного пучка, все частицы которого имеют один и тот же продольный и поперечный импульс:

$$f_0^b = \frac{n_1}{2\pi p_{10}} \delta(p_z - p_{z0}) \delta(p_{\perp} - p_{\perp 0}). \quad (2.117)$$

Такая функция распределения соответствует как бы пучку осцилляторов (назовем их ларморовскими), имеющих одну и ту же скорость движения вдоль магнитного поля, но равномерно размещенных в равновесном состоянии по фазам вращения в магнитном поле.

Для рассмотрения пучковой неустойчивости окажется важным учет релятивистской зависимости циклотронной частоты от энергии

электронов. В релятивистском случае формула для циклотронной частоты  $\omega_{He} = eH_0/m_e c$  переходит в следующую:

$$\omega_{He} = eH_0 c / \omega, \quad (2.118)$$

где  $\omega = m_e c^2 \sqrt{1 + p^2/m_e^2 c^2}$  — энергия частицы. Переход к релятивистскому случаю очень прост. Для этого следует заменить  $1/m_e (\partial/\partial v)$  на  $\partial/\partial p$ . В результате вместо (2.111) получим следующее дисперсионное уравнение:

$$\frac{c^2 k^2}{\omega^2} - 1 = -\frac{2\pi e^2}{\omega} \int \frac{v_{\perp} dv}{kv_z - \omega + \omega_{He}} \left[ \left(1 - \frac{kv_z}{\omega}\right) \frac{\partial f_0}{\partial p_{\perp}} + \frac{kv_{\perp}}{\omega} \frac{\partial f_0}{\partial p_z} \right]. \quad (2.119)$$

Разделим функцию распределения  $f_0$  на две — функцию для тепловых нерелятивистских частиц плазмы и функцию релятивистского пучка (2.117). Для частиц пучка интеграл по продольным и поперечным импульсам легко вычисляется интегрированием по частям. В результате приходим к следующему дисперсионному уравнению:

$$\begin{aligned} c^2 k^2 - \omega^2 + \omega_p^2 \omega' / (\omega - \omega_{He}) = \\ = - (1/2) [\omega_p^2 (k^2 c^2 - \omega^2) / (\omega - kv_0 - \omega_{He})^2] (v_{\perp 0}^2 / c^2). \end{aligned} \quad (2.120)$$

Здесь учтено, что для неустойчивой волны приближенно должно выполняться условие циклотронного резонанса (2.112), и поэтому в правой части дисперсионного уравнения сохранены только слагаемые со старшей степенью (квадрат) резонансного знаменателя. Подчеркнем, что при нерелятивистском рассмотрении частиц пучка вклад пучка содержит только первое слагаемое, пропорциональное  $k^2 c^2$ .

Таким образом, нерелятивистское рассмотрение применимо лишь для медленных волн с большим показателем преломления  $N \gg 1$ , в общем же случае нужно учитывать релятивистскую зависимость массы и циклотронной частоты частиц пучка от их энергии.

Решение дисперсионного уравнения можно получить аналогично тому, как это было сделано для пучковой неустойчивости в отсутствие магнитного поля. Частота наиболее неустойчивой волны определяется из условия

$$(ck(\omega^{(0)})^2 = \epsilon, \quad (2.121)$$

т. е. дисперсионные свойства такой волны те же, что для исследовавшейся выше необыкновенной волны. Наличие пучка малой плотности приводит к возмущению ее частоты.

Полагая, что эта волна находится в циклотронном резонансе с электронным пучком

$$\omega^{(0)} = kv_0 + \omega_{He}; \quad (2.122)$$

для мнимой части добавки к частоте, т. е. для инкремента нарастания, получаем из дисперсионного уравнения следующее соотношение:

$$\gamma = \frac{\sqrt{3}}{2^{4/3}} \left[ \frac{\omega_b^2 (c^2 k^2 - \omega^2)}{\frac{\partial}{\partial \omega} (\omega^2 N(\omega))} \frac{v_{\perp 0}^2}{c^2} \right]^{1/3} \quad (2.123)$$

Приведенная формула для инкремента нарастания содержит вклады от двух возможных механизмов неустойчивости электронного пучка в магнитном поле — циклотронного и мазерного. Остановимся на этом вопросе более подробно.

Так же, как и в отсутствие магнитного поля, в рассматриваемом случае для возникновения неустойчивости кроме резонансного условия (2.122) должно выполняться условие бунчировки частиц пучка в тормозящих фазах поля волны.

Для электронного пучка в магнитном поле возможны два механизма бунчировки. Один из них существенно связан с продольной неоднородностью поля волны — это бунчировка электронного пучка по продольным фазам  $kz$ , при которой частицы пучка стягиваются в сгустки, локализованные в области тормозящих фаз. Такой механизм аналогичен бунчировке электронного пучка в отсутствие магнитного поля, с той разницей, что в рассматриваемом случае электромагнитной волны бунчировка осуществляется из-за наличия продольной компоненты силы Лоренца, (обусловленной магнитным полем волны)  $(e/c) [\mathbf{v}_{\perp} \mathbf{H}]_z$ .

Можно воспользоваться условием (1.161), если под  $\omega$  понимать частоту волны в системе отсчета, вращающейся вместе с электронами. Таким образом, условие бунчировки по продольной фазе имеет вид

$$\omega - \omega_H < kv_z. \quad (2.124)$$

И опять, как без магнитного поля, стабилизация неустойчивости происходит в результате захвата электронов пучка в эффективные потенциальные ямы. При колебаниях электронов в этих потенциальных ямах меняется продольная фаза. Период этих осцилляций определяется формулой (1.150) с заменой  $E$  на  $(v_{\perp}/c)H$ . Таким образом,

$$\tau_b \approx 1/\sqrt{kv_{\perp} (eH/m_e c)}. \quad (2.125)$$

Амплитуда поля, при которой происходит стабилизация неустойчивости, так же как и в изотропной плазме, определяется из условия  $\gamma \tau_b \sim 1$ . Связанная с такой бунчировкой неустойчивость называется циклотронной. Однако в магнитном поле возможен еще один механизм бунчировки — группировка частиц пучка по фазам вращения в магнитном поле. В отличие от первого механизма этот механизм бунчировки является чисто релятивистским. Поясним, как происходит группировка электронов по фазам вращения в магнитном поле (рис. 2.19).

В системе отсчета, вращающейся вместе с электроном, частота изменения действующего на электрон электрического поля  $\omega' = \omega_H$  ( $\omega'$  — частота поля с учетом доплеровского сдвига,  $\omega' = \omega - k_z v_z$ ). Если циклотронная частота не зависит от энергии, то ускорение электрона на первом полупериоде изменения поля компенсируется торможением его на втором полупериоде и суммарное изменение энергии равняется нулю. Однако, поскольку с учетом релятивизма  $d\omega_H/d\omega < 0$ , то в области тормозящих фаз поля циклотронная частота возрастает. В этом случае при  $\omega' > \omega_H$  такое возрастание циклотронной частоты означает, что область тормозящих фаз поля проходит медленнее [ $\tau \sim 1/(\omega' - \omega_H)$ ], электроны здесь группируются и энергия передается от электронов пучка к волне.

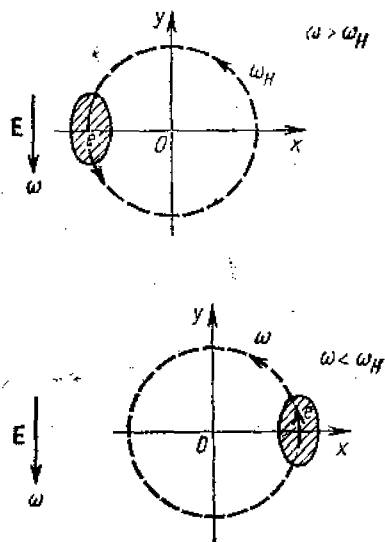


Рис. 2.19. Группировка частиц по фазам ларморовского вращения

Таким образом, при  $d\omega_H/d\omega < 0$  условие бунчировки электронов в той области фаз, где они тормозятся волной, т. е. условие возникновения неустойчивости имеет вид

$$\omega - kv_z > \omega_H. \quad (2.126)$$

Нерелятивистская группировка по продольной фазе существенна только для достаточно медленных электромагнитных волн  $\omega \ll kc$ , т. е.  $N(\omega) \gg 1$ . В этом случае в формуле для инкремента доминирует первое слагаемое и имеет место нерелятивистская циклотронная неустойчивость.

При раскачке быстрой электромагнитной волны  $\omega > kc$  существенным оказывается релятивистский эффект зависимости циклотронной частоты от энергии. Неустойчивость этого типа называют мазерной.

Как и следовало ожидать, вклады от обоих механизмов группировки [слагаемые в квадратных скобках в выражении (2.123) для инкремента] противоположны по знаку. Это объясняется тем, что условия группировки (2.124) и (2.126) противоположны. Интересно отметить, что при  $\omega = kc$ , т. е. для среды с показателем преломления  $N(\omega) \sim 1$ , соответствующие вклады компенсируют друг друга и неустойчивость отсутствует.

Происхождение самого термина «мазерная неустойчивость» связана с использованием квантовомеханической интерпретации. При такой интерпретации электронный пучок рассматривается как

газ осцилляторов с уровнями энергии  $\omega_n = n\omega_H$  ( $n=0, 1, 2, \dots$ ). Как и в обычном лазере, для неустойчивости необходима неэквидистантность энергетических уровней, т. е. в данном случае зависимость  $\omega_n$  от энергии. Тогда квант поля, излученный при переходе осциллятора на более низкий энергетический уровень  $n \rightarrow n-1$ , не может поглотиться при переходе  $n \rightarrow n+1$ , и происходит усиление поля излучения.

Уровень амплитуды поля, возбуждаемого при лазерной неустойчивости, определяется из условия

$$\Delta\omega_H = (d\omega_H/d\omega)\Delta\omega \sim \gamma \quad (2.127)$$

(расстройка частоты  $\omega' - \omega_H$  порядка инкремента  $\gamma$ ). При таких амплитудах происходят эффективная бунчировка и захват частиц при движении по фазе  $\phi$ . Изменение энергии частицы за характерное время развития неустойчивости  $t \sim 1/\gamma$

$$\Delta\omega = eE_{\perp}/\gamma. \quad (2.127a)$$

Из (2.127) и (2.127a) получаем следующую оценку для максимальной амплитуды электрического поля волны:

$$(eE_{\max}/m)v_{\perp} \sim (\gamma^2/\omega_H)c^2. \quad (2.128)$$

Мазерная неустойчивость позволяет получать большие амплитуды электромагнитных волн в генераторах мощного электромагнитного излучения, основанных на использовании интенсивных пучков электронов (циклотронные мазеры А. В. Гапонова-Грехова).

Кроме резонансного взаимодействия частиц с волнами существует еще важный класс взаимодействий, при которых нельзя четко выделить группу частиц, ответственную за затухание или неустойчивость. Это так называемое нерезонансное или адиабатическое взаимодействие. Одним из самых наглядных примеров могут служить неустойчивости плазмы, требующие для своего возникновения, как правило, еще более сильной анизотропии функции распределения  $f_0(v_{\perp}, v_{\parallel})$ .

Неустойчивость в рассматриваемом случае может возникать для волн, распространяющихся под произвольным углом к магнитному полю. Для простоты рассмотрим ставший уже традиционным предельный случай волны, распространяющейся вдоль магнитного поля, т. е. альвеновскую волну.

В действительности при выполнении приведенного ниже критерия неустойчивости возмущение не носит волнового характера (формально это проявляется в том, что  $\omega^2$  становится отрицательным). Тем не менее будем говорить для краткости о «неустойчивости на альвеновской волне», имея в виду, что при уменьшении анизотропии рассматриваемый тип возмущений переходит в альвеновские волны.

Так же как и рассмотренную выше гидродинамическую неустойчивость резонансного типа нерезонансную неустойчивость можно

получить из общего дисперсионного уравнения кинетического приближения. Для возмущений альвееновского типа в дисперсионном уравнении следует учесть также вклад ионов.

Уравнение (2.111) нетрудно обобщить:

$$c^2 k^2 - \omega^2 = -\frac{2\pi e^2 \omega}{m_e} \int d\mathbf{v} \frac{v_{\perp}}{kv_z - \omega + \omega_{He}} \left[ \left( 1 - \frac{kv_z}{\omega} \right) \frac{\partial f_e^*}{\partial v_{\perp}} + \frac{kv_{\perp}}{\omega} \frac{\partial f_e^*}{\partial v_z} \right] - \frac{2\pi e^2 \omega}{m_i} \int d\mathbf{v} \frac{v_{\perp}}{kv_z - \omega - \omega_{Hi}} \left[ \left( 1 - \frac{kv_z}{\omega} \right) \frac{\partial f_i^*}{\partial v_{\perp}} + \frac{kv_{\perp}}{\omega} \frac{\partial f_i^*}{\partial v_z} \right]. \quad (2.129)$$

Рассмотрим возмущение с длиной волны  $\lambda$ , много большей среднего ларморовского радиуса электронов и ионов (и характерным временем изменения амплитуды, значительно превышающим периоды обращения частиц в магнитном поле). Тогда интеграл для ионов легко вычисляется путем разложения по параметрам:

$$\omega/\omega_{Hi} \ll 1; kv_z/\omega_{Hi} \ll 1. \quad (2.130)$$

Для электронов вообще достаточно ограничиться членом старшего порядка по  $1/\omega_{He}$ . В результате получим следующее уравнение:

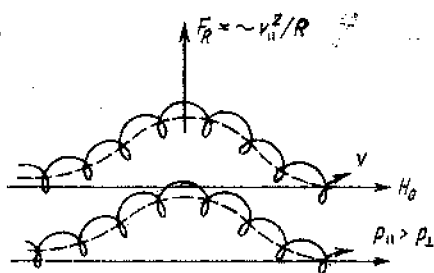


Рис. 2.20. «Шланговая» неустойчивость

$$c^2 k^2 - \omega^2 = -\frac{2\pi e^2 \omega}{m_e \omega_{He}} \int d\mathbf{v} v_{\perp} \frac{\partial f_e^*}{\partial v_{\perp}} + \frac{2\pi e^2 \omega}{m_i \omega_{Hi}} \int d\mathbf{v} v_{\perp} \left\{ \frac{\partial f_i^*}{\partial v_{\perp}} \left( 1 - \frac{\omega}{\omega_{Hi}} \right) - \frac{\partial f_i^*}{\partial v_z} \frac{k^2 v_z^2}{\omega \omega_{Hi}} + \frac{\partial f_i^*}{\partial v_z} \frac{k^2 v_{\perp} v_z}{\omega \omega_{Hi}} \right\}.$$

Для плазмы с изотропным распределением частиц по скоростям отсюда следует дисперсионное уравнение альвееновской волны  $\omega = kv_A$ . При достаточно большой анизотропии

$$T_{\parallel} > T_{\perp} + H^2_0/4\pi n_0, \quad (2.131)$$

рассматриваемая мода колебаний становится аперiodически неустойчивой:

$$\omega^2 = -k^2 (T_{\parallel} - T_{\perp} - H^2_0/4\pi n_0)/m_i. \quad (2.132)$$

Эта неустойчивость допускает наглядную физическую интерпретацию. Воспользуемся тем, что альвееновские волны можно наглядно представить как колебания «упругих нитей» — силовых линий магнитного поля. Рассмотрим силы, возникающие при малом искривлении силовой линии в анизотропной плазме (рис. 2.20).

Так как частицы «привязаны» к силовым линиям, то при движении по искривленному участку силовой линии возникает цен-

тробежная сила

$$F_R = \int (m v_{\parallel}^2 / R) f dv_{\parallel} d\mu,$$

стремящаяся увеличить искривление. Здесь учтено, что при выполнении условий (2.130) можно пользоваться дрейфовым приближением, в рамках которого плазма рассматривается как совокупность квазичастиц — ларморовских кружков с сохраняющимся магнитным моментом  $\mu = \omega_{\perp} / H$ . Распределение частиц тогда удобно описывать функцией  $f(\mu, v_{\parallel})$ , где  $v_{\parallel}$  — скорость вдоль постоянного магнитного поля;  $\omega_{\perp}$  — энергия вращения. Поскольку, кроме того, каждая квазичастица обладает магнитным моментом  $-\mu \mathbf{H} / H$ , ориентированным против магнитного поля  $\mathbf{H}$ , то на них в неоднородном магнитном поле будет действовать сила, связанная с наличием тока намагничивания:

$$\mathbf{j}_{\mu} = \text{rot} \int \mu f dv_{\parallel} d\mu; \quad \mathbf{F}_{\mu} = [\mathbf{j}_{\mu} \times \mathbf{H}] = \left[ \text{rot} \int \mu f(\mu, v_{\parallel}) dv_{\parallel} d\mu \times \mathbf{H} \right].$$

Эта сила вместе с силой «натяжения» линий магнитного поля

$$\mathbf{F}_H = [\mathbf{j} \times \mathbf{H}] = \frac{1}{4\pi} [\text{rot} \mathbf{H} \times \mathbf{H}]$$

стремится вернуть силовую линию в положение равновесия.

Если  $F_R > F_{\mu} + F_H$ , то система уходит от положения равновесия, т. е. возникает неустойчивость. В рассматриваемом возмущении отлична от нуля лишь компонента  $k_{\parallel}$  волнового вектора. После несложных выкладок получим следующее условие неустойчивости:

$$p_{\parallel} - p_{\perp} > H^2 / 4\pi, \quad \text{где } p_{\parallel} = \int m v_{\parallel}^2 f dv_{\parallel} d\mu; \quad p_{\perp} = \int \mu H f dv_{\parallel} d\mu.$$

Поскольку при выполнении условия (2.131) результирующая сила все время уводит систему от положения равновесия, неустойчивость носит апериодический характер. Инкремент  $\gamma$  легко найти, приравняв сумму сил  $F_R - F_{\mu} - F_H$  к произведению массы элемента плазмы на ускорение:  $\dot{v} = (d/dt) c(E/H_0)$ . Но так как из уравнений Максвелла  $E = H \gamma / kc$ , то  $\dot{v} = \gamma^2 H / k H_0$ . Подставляя значение  $F$ , получаем [см. формулу (2.132)]

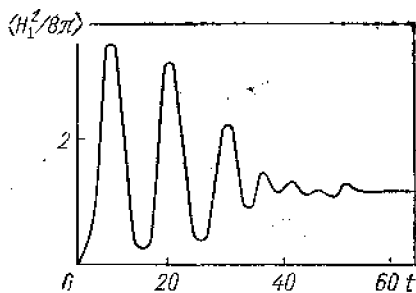
$$\gamma^2 = k^2 (p_{\parallel} - p_{\perp} - H^2 / 4\pi) / \rho. \quad (2.133)$$

В проведенном анализе действительно трудно было бы выделить какую-то группу резонансных частиц, ответственных за неустойчивость. Этот конкретный вид адиабатической неустойчивости называют «шланговой» или центробежной (за очевидную аналогию с капризным поведением садового шланга, по которому подается мощная струя воды). Квазилинейный подход, применяющийся для описания поведения плазмы при развитии адиабатических неустойчивостей, учитывает отсутствие резонансных частиц, а со-

Рис. 2.21. Рост флуктуаций магнитного поля  $\langle H^2_{\perp} / 8\pi \rangle$  при шланговой неустойчивости (численный расчет Березина Ю. А., Сагдеева Р. З. «Докл. АН СССР», 1969, т. 184, с. 570).

Флуктуирующее магнитное поле  $H_{\perp}$  измеряется в единицах  $H_0$ ; время выражено в обратных инкрементах шланговой неустойчивости; усреднение проводится по длине волны. В начальном состоянии  $\rho_{\parallel} = -30H_0^2/8\pi$ ,  $\rho_{\perp} = 6,6H_0^2/8\pi$  возмущение магнитного поля выбралось в виде монохроматической волны с круговой поляризацией.

Экспоненциальный рост амплитуды поля сменяется регулярными осцилляциями, соответствующими одномодовому режиму (монохроматическая волна). Переход в турбулентный многомодовый режим со стохастическим пространственным распределением поля приводит к затуханию осцилляций и установлению квазистационарного состояния.



ответствующая квазилинейная диффузия затрагивает практически все частицы плазмы. На рис. 2.21 показаны результаты численного анализа шланговой неустойчивости для двухтемпературной  $T_{\parallel}, T_{\perp}$  бесстолкновительной гидродинамической модели.

### § 2.8. Взаимодействие волн с частицами плазмы в магнитном поле и квазилинейная диффузия

В этом параграфе будет продолжено исследование резонансного взаимодействия волн и частиц в магнитном поле.

Кроме резонансов (2.112), (2.113), возникающих при продольном распространении электромагнитной волны, в магнитном поле возможны и другие резонансы между частицами и волной. Прежде всего это резонанс Ландау между продольным движением частиц и волной:

$$\omega = k_z v_z. \quad (2.134)$$

Такой резонанс обычно существует, когда волна имеет составляющую электрического поля в направлении магнитного поля и частицы, продольные скорости которых  $v_z$  близки к соответствующей проекции фазовой скорости волны  $\omega/k_z$ , эффективно обмениваются энергией с электрическим полем волны. Резонанс (2.134) вполне аналогичен резонансу Ландау в изотропной плазме, детально исследованному в ч. 1.

Новой особенностью волн в магнитном поле является возможность появления магнитных потенциальных ям, движущихся вместе с волнами. Для примера рассмотрим случай магнитозвуковой волны, распространяющейся под углом к магнитному полю. Продольная составляющая электрического поля в такой волне пренебрежимо мала, и резонанс Ландау связан с существованием для частиц магнитной потенциальной ямы.

При  $\omega \ll \omega_{ni}$  сохраняются магнитные моменты электронов и ионов. В неоднородном магнитном поле волны на эти моменты действует сила  $-\mu \nabla H$ . Волна с заданными  $\omega$  и  $k$  создает периодическую картину сгущений и разрежений силовых линий магнитного



поля, движущуюся с фазовой скоростью волны  $\omega/k$ . Под влиянием силы  $-\mu \nabla H$  резонансные частицы, скорости которых удовлетворяют условию (2.134), будут отражаться от областей сгущения силовых линий и захватываться в магнитную потенциальную яму.

Рассуждения, аналогичные изложенным в ч. I, приводят к выводу о том, что декремент затухания волны, обусловленного рассматриваемым механизмом, как обычно, должен зависеть от производной функции распределения в резонансной точке:

$$\gamma \sim \int \mu df / dv_x |_{v_x = \omega/k_z} d\mu. \quad (2.135)$$

Фазовая скорость магнитозвуковых волн по порядку величины равна  $H_0 / \sqrt{4\pi}$ ; в достаточно сильном магнитном поле эта скорость значительно превышает тепловую скорость частиц, так что, вообще говоря, и здесь затухание оказывается экспоненциально малым. Период фазовых колебаний в магнитном поле получается из формулы (1.150) с помощью очевидной замены  $eE = ek_z v \rightarrow \mu k_z H$ . Таким образом,

$$\tau_0 \sim 1 / \sqrt{\mu k_z^2 H / m}. \quad (2.135a)$$

Очевидно, что линейное затухание магнитозвуковой волны имеет место при достаточно малых амплитудах поля волны, когда частота  $1/\tau_0$  существенно меньше декремента затухания. Как мы уже знаем, при больших амплитудах захват резонансных частиц в потенциальную яму, созданную волной, и их фазовые осцилляции в этой яме выключают затухание Ландау и приводят к колебаниям амплитуды поля волны со временем.

Для магнитозвуковых волн также возможна лучковая неустойчивость при обращении знака производной функции распределения в формуле (2.135).

Для того чтобы получить общие условия резонанса волн и частиц в магнитном поле, рассмотрим, как будет происходить движение частиц в электрическом поле волны в произвольном случае наклонного распространения  $\mathbf{k} = \{0, k_{\perp}, k_z\}$ . Будем считать для простоты, что существенны только компоненты электрического поля, перпендикулярные к внешнему магнитному полю  $\mathbf{H}_0$ . Тогда уравнения движения заряженной частицы (электрона или иона) будут иметь вид (рассматривается нерелятивистское движение)

$$\left. \begin{aligned} m (dv_x/dt) &= eE_x \exp(-i\omega t + ik_{\perp}x + ik_z z) + (e/c)v_y H_0; \\ m (dv_y/dt) &= eE_y \exp(-i\omega t + ik_{\perp}x + ik_z z) - (e/c)v_x H_0. \end{aligned} \right\} \quad (2.136)$$

Отсюда для  $v = v_x + iv_y$  получим

$$m (dv/dt) + i(eH_0/c)v = eE_+ \exp(-i\omega t + ik_{\perp}x + ik_z z), \quad (2.136a)$$

где  $E_+ = E_x + iE_y$ . Замена  $v = \bar{v} \exp(-i\omega_H t)$  в уравнении (2.136a) дает

$$d\bar{v}/dt = (eE_+/m) \exp(-i\omega t + i\omega_H t + ik_{\perp} x + ik_z z). \quad (2.137)$$

Теперь воспользуемся тем, что рассматривается, как обычно, волна малой амплитуды. В данном случае это значит, что волна не слишком сильно возмущает траекторию частицы. Иначе говоря, в экспоненте, стоящей в правой части уравнения (2.136a), под  $x$  и  $z$  будем понимать их невозмущенные значения, соответствующие свободному движению частицы в магнитном поле:

$$dx/dt = v_x \cos \omega_H t - v_y \sin \omega_H t;$$

$$dy/dt = v_x \sin \omega_H t + v_y \cos \omega_H t;$$

$$dz/dt = v_z.$$

Тогда экспоненциальный множитель принимает вид

$$\mathcal{F}(t) = \exp[i(\omega_H - \omega - k_z v_z)t + i(k_{\perp} v_y / \omega_H)(1 - \cos \omega_H t) - i(k_{\perp} v_x / \omega_H) \sin \omega_H t].$$

В итоге возмущенное движение частицы определяется зависимостью от времени экспоненциального множителя  $\mathcal{F}(t)$ . Функция

$$\mathcal{F}_H(t) = \exp[(-ik_{\perp} v_x / \omega_H) \sin \omega_H t + i(k_{\perp} v_y / \omega_H)(1 - \cos \omega_H t)] \quad (2.138)$$

является периодической по  $t$  с периодом  $2\pi/\omega_H$ , и ее можно представить в виде ряда по  $\exp(in\omega_H t)$ . Коэффициенты разложения для функции вида (2.138) после несложных преобразований можно выразить через бесселевы функции (именно так появляются цилиндрические функции в теории колебаний замагниченной плазмы). Мы не будем вдаваться в дальнейшие детали вычисления. Остановим внимание лишь на следующем существенном обстоятельстве. С учетом сказанного выше результирующая вынуждающая сила [правая часть уравнения (2.137)], представляющая собой действие поля волны на частицу, оказывается суммой элементарных гармонических сил вида

$$\mathcal{F}_n \exp(-i\omega t + in\omega_H t + ik_z v_z t).$$

Соответственно реакция частицы на такое воздействие есть просто сумма влияний отдельных сил:  $v_n \sim \mathcal{F}_n / (n\omega_H + k_z v_z - \omega)$ . Наибольшего эффекта взаимодействие достигает при условии резонанса

$$\omega - k_z v_z = n\omega_H. \quad (2.139)$$

Здесь, очевидно,  $n$  принимает все целые значения:  $n = \pm 1, \pm 2, \dots$

Резонанс при  $n=1$  для электронов уже был рассмотрен ранее для случая взаимодействия с частицами необыкновенной электромагнитной волны, распространяющейся вдоль внешнего магнитного поля. Это циклотронный резонанс между электронами и элек-

трическим полем волны, вектор которого вращается в ту же сторону, что и электроны. В условии резонанса учитывается доплеровский сдвиг частоты  $\omega' = \omega - k_z v_z$  (в радиофизике условие резонанса с  $n=1$  часто называют резонансом при нормальном эффекте Доплера). Если бы в предыдущем параграфе было учтено движение ионов в необыкновенной волне, то условие их резонанса с волной имело бы вид

$$\omega - k_z v_z = -\omega_{Hi}. \quad (2.140)$$

(Поскольку ионы вращаются в сторону, обратную направлению вращения электрического вектора, то резонанс возможен только при достаточно большом доплеровском сдвиге частоты, когда из-за этого сдвига частота меняет знак.)

Аналогичным образом условия резонансного взаимодействия обыкновенной электромагнитной волны с ионами и электронами имеют вид

$$\omega - k_z v_z = \omega_{Hi}; \quad (2.140a)$$

$$\omega - k_z v_z = -\omega_{He}.$$

Таким образом, наряду с циклотронным резонансом с  $n=1$  возможен также циклотронный резонанс с  $n=-1$ . Это так называемый циклотронный резонанс при аномальном эффекте Доплера. Заметим, что он возможен только при достаточно большой продольной скорости частиц  $v_z$ , превышающей фазовую скорость волны  $\omega/k_z$ .

Резонансы в условиях нормального и аномального эффектов Доплера были изучены довольно давно при рассмотрении излучения заряженных частиц в магнитном поле. Оказалось, что физическая картина, соответствующая этим двум резонансам, совершенно различная.

При нормальном эффекте Доплера излучение происходит из-за наличия поперечной составляющей энергии частиц, в данном случае ларморовского осциллятора, и сопровождается переходом этого осциллятора на более низкий энергетический уровень. Резонанс возможен и в отсутствие продольного движения частиц  $v_z \rightarrow 0$ . Резонанс же при аномальном эффекте Доплера соответствует излучению волн в результате существования продольной энергии заряженной частицы. Излучение сопровождается увеличением поперечной энергии частицы, т. е. возбуждением ларморовского осциллятора.

Так же, как излучение отдельной заряженной частицы, пучковая неустойчивость при аномальном эффекте Доплера развивается из-за присутствия продольной составляющей энергии пучка, т. е. обыкновенная электромагнитная волна может возбуждаться электронным пучком, движущимся вдоль магнитного поля. При нормальном эффекте Доплера пучковая неустойчивость развивается из-за существования поперечной составляющей энергии пучка лар-

морозских осцилляторов. Действительно, инкремент пучковой неустойчивости необыкновенной волны, полученный в предыдущем параграфе, обращается в нуль при  $v_{\perp} \rightarrow 0$ .

Рассмотрим циклотронную неустойчивость электромагнитных волн. Для многих физических приложений, в первую очередь для физики магнитосферы, чрезвычайно важной оказывается циклотронная неустойчивость ионных и электронных свистов, т. е. необыкновенной волны при  $\omega \lesssim \omega_{Hi}$  и необыкновенной волны при  $\omega \lesssim \omega_{He}$ . Показатель преломления таких волн достаточно велик ( $ck/\omega \gg 1$ ), и поэтому при рассмотрении их неустойчивости можно не учитывать релятивистские эффекты в движении резонансных частиц.

Кроме гидродинамической циклотронной неустойчивости, которая исследовалась в предыдущем параграфе, возможна также кинетическая неустойчивость. В этом случае так как резонансные частицы имеют неравновесную функцию распределения (пучок, анизотропия распределения по скоростям), то может происходить обращение знака декремента циклотронного затухания в формуле (2.115). Эта формула описывает взаимодействие резонансных электронов с необыкновенной волной, но ее можно легко обобщить на случай взаимодействия с такой волной резонансных ионов:

$$\gamma_i = \frac{2\pi e^2}{m_i} \frac{\omega}{|k|} \frac{1}{\frac{d}{d\omega}(\omega^2 N(\omega))} \int d\mathbf{v}_{\perp} v_{\perp} \left[ \left(1 - \frac{kv_z}{\omega}\right) \frac{\partial f_i}{\partial v_{\perp}} + \frac{kv_{\perp}}{\omega} \frac{\partial f_i}{\partial v_z} \right]. \quad (2.141)$$

Отметим, что как и в ч. I, формулы для декремента (инкремента) амплитуды волны можно получить не только формальным решением дисперсионного уравнения, но и с помощью простого энергетического подхода, основанного на балансе энергии в системе волна — резонансные частицы.

Из формулы для циклотронного декремента (инкремента) необыкновенной волны следует, что условие возникновения циклотронной неустойчивости имеет вид

$$\int d\mathbf{v}_{\perp} v_{\perp} \left[ \left(1 - \frac{kv_z}{\omega}\right) \frac{\partial f_0}{\partial v_{\perp}} + \frac{kv_{\perp}}{\omega} \frac{\partial f_0}{\partial v_z} \right] \Big|_{v_z = (\omega - \omega_H)/k} > 0. \quad (2.142)$$

Покажем, как это условие реализуется в плазме с неизотропным максвелловским распределением по скоростям (с разными продольной и поперечной температурами):

$$f_0 \sim \exp \left\{ -mv_{\perp}^2/2T_{\perp} - mv_z^2/2T_{\parallel} \right\}.$$

Выполняя интегрирование по  $v_{\perp}$ , находим, что критерий неустойчивости в этом случае имеет вид

$$T_{\perp}/T_{\parallel} + (\omega_{He}/\omega) (1 - T_{\perp}/T_{\parallel}) < 0 \quad (\text{для электронов}); \quad (2.143)$$

$$T_{\perp}/T_{\parallel} - (\omega_{Hi}/\omega) (1 - T_{\perp}/T_{\parallel}) < 0 \quad (\text{для ионов}). \quad (2.143a)$$

При этом для необыкновенной волны циклотронная неустойчивость на электронах возникает при  $T_{\perp} > T_{\parallel}$  (нормальный эффект Доплера), а на ионах — при  $T_{\parallel} > T_{\perp}$  (аномальный эффект Доплера).

Для обыкновенной волны неустойчивость на ионах и электронах имеет место при обратных соотношениях между температурами.

Циклотронная неустойчивость свистов (или геликонов) играет фундаментальную роль в динамике радиационных поясов Земли. В существовании такой неустойчивости можно убедиться, если конкретные функции распределения частиц радиационных поясов — энергичных протонов и электронов — подставить в критерий (2.142). На рис. 2.22 показаны примеры функций распределения энергичных частиц в магнитосфере Земли по данным измерений на спутниках.

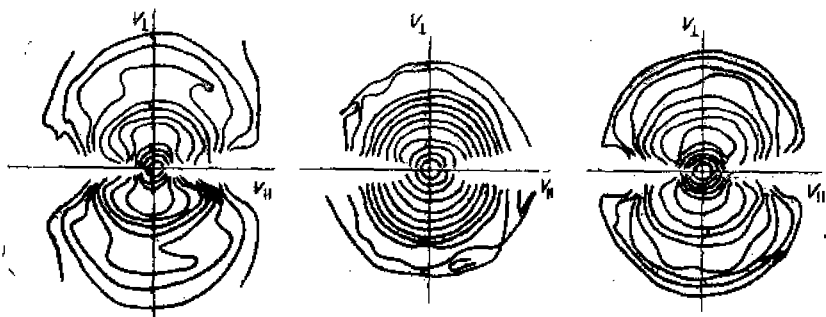


Рис. 2.22. Контуры линий уровня функции распределения протонов в радиационном поясе Земли.

Скорость дана в масштабе  $10^7$  см/с на деление. Три показанных распределения соответствуют трем последовательным областям пространства вдоль траектории спутника, на котором проводилось измерение функции распределения протонов. Условия для ионно-циклотронной неустойчивости выполняются за счет распределения с опустошенным «конусом потерь» (Williams D. J. *Physics of Hot Plasma in Magnetosphere*, Ed. by B. Hultqvist, L. Stenflo. London, Plenum Press, 1975)

Для конкретности проведем дальнейшие выкладки для модельного максвелловского распределения с неизотропными температурами. Это, конечно, является идеализацией, так как «резонансные» частицы, вызывающие неустойчивость в магнитосферной плазме, разумеется, не описываются максвелловским распределением.

Из (2.143) следует, что неустойчивость имеет место даже при очень малой анизотропии температур  $|T_{\perp} - T_{\parallel}|/T_{\perp} \ll 1$ , при этом, однако, инкремент  $\gamma$  оказывается экспоненциально малым. Действительно,  $\gamma$  пропорционально

$$f_{\perp} [v_z = (\omega - \omega_H)/k_z] \sim \exp \left\{ -(m/2) [(\omega - \omega_H)^2 / T_{\perp} k^2] \right\}.$$

При  $\omega \ll \omega_H$ ,  $k^2 = \omega^2 / v_A^2$ , и так как согласно (2.143) неустойчивость имеет место для  $\omega \leq \omega_H |T_{\parallel} - T_{\perp}| / T_{\parallel}$ , то для наиболее «опасных»

волн инкремент  $\gamma$  будет пропорционален

$$\exp \left\{ - (m_i/2) (\omega^2_A/T) [T/(T_{\parallel} - T_{\perp})]^2 \right\}.$$

Следует заметить, что в реальной ситуации при малой анизотропии рассмотренная неустойчивость может и не возникнуть, если, например, в «обрезанном» максвелловском распределении отсутствуют частицы с большими продольными скоростями:

$$v_z \sim \sqrt{T/m_i} T / (T_{\parallel} - T_{\perp}),$$

ответственные за раскачку колебаний. Это приводит к тому, что на практике нарастание волн вследствие подобной неустойчивости может быть заметным лишь при достаточно высокой степени анизотропии, тем большей, чем больше отношение магнитного давления к плазменному.

Пусть, например,  $T_{\perp} > T_{\parallel}$ . Не будем заранее считать анизотропию температур малой, т. е. не будем предполагать выполненным условие  $\omega \ll \omega_{Hi}$ . Оценим, при какой степени анизотропии экспонента  $\exp \left\{ - (m_i/2) [(\omega - \omega_{Hi})^2/T_{\parallel} k^2] \right\}$ , входящая в выражение для инкремента, станет порядка единицы:

$$m_i (\omega - \omega_{Hi})^2 / T_{\parallel} k^2 \sim 1. \quad (2.144)$$

Квадрат волнового вектора  $k^2$  можно выразить через  $\omega$  с помощью дисперсионного соотношения для «холодной» плазмы, вывод которого приведен выше (см. § 2.6):

$$k^2 c^2 / \omega^2 = \omega_{Hi}^2 / [\omega_{Hi} (\omega_{Hi} - \omega)]$$

(если речь идет о волне, вектор поляризации которой вращается в направлении вращения ионов в магнитном поле). Подставляя  $k^2 = \omega_{Hi}^2 \omega^2 / [c^2 \omega_{Hi} (\omega_{Hi} - \omega)]$  в (2.144) и учитывая, что согласно (2.143) для неустойчивости необходимо  $\omega < \omega_{Hi} (1 - T_{\parallel i} / T_{\perp i})$  получаем

$$T_{\perp i} / T_{\parallel i} \geq \sqrt{N^2 / 8\pi n T_{\perp i}}. \quad (2.145)$$

При этом условии инкремент неустойчивости становится заметным. Аналогичное условие имеет место и для волны, поляризованной в направлении вращения электронов. Ясно, что при прочих равных условиях электронная ветвь должна иметь больший инкремент.

Развивая последовательно аналогию с продольными колебаниями, для рассматриваемого взаимодействия между частицами и волнами при циклотронном резонансе можно рассмотреть квазилинейную стадию, которая должна учитывать обратное влияние волн на распределение частиц по скоростям (в данном случае по  $v_z$  и  $v_{\perp}$ ). Для простоты и здесь ограничимся простейшими случаями, а именно ионными и электронными циклотронными волнами (свистами), распространяющимися вдоль  $H_0$ . Ограничение случа-

ем параллельного распространения упрощает алгебру, позволяя рассматривать только основную гармонику циклотронного резонанса и освобождая от необходимости выписывать громоздкие формулы с функциями Бесселя. Но в то же время оно не вносит существенных изменений в физическую картину.

Будем исходить из кинетического уравнения

$\partial f / \partial t + v_z (\partial f / \partial z) - \omega_H (\partial f / \partial \varphi) + (e/m) \{ E_{\perp} + (1/c) [\mathbf{v} \times \mathbf{H}_{\perp}] \} (\partial f / \partial v) = 0$  и уравнений Максвелла для  $E_{\perp}$ ,  $H_{\perp}$ . Если представить функцию распределения в виде суммы медленно и быстро меняющихся частей:  $f = f_0(t, v_{\perp}, v_z) + f_1$  и воспользоваться формулой для  $f_1$ , то уравнение для медленно меняющейся части принимает вид [см. (1.192)]

$$\frac{\partial f_0}{\partial t} = \left(\frac{e}{m}\right)^2 \sum_k \left[ \left(1 - \frac{kv_z}{\omega_k}\right) \frac{1}{v_{\perp}} \frac{\partial}{\partial v_{\perp}} v_{\perp} + \frac{kv_{\perp}}{\omega_k} \frac{\partial}{\partial v_z} \right] \times \\ \times \frac{|E_k|^2}{i(kv_z - \omega_k \mp \omega_H)} \left[ \left(1 - \frac{kv_z}{\omega_k} \frac{\partial f_0}{\partial v_{\perp}} + \frac{kv_{\perp}}{\omega_k} \frac{\partial f_0}{\partial v_z} \right) \right] \quad (2.146)$$

Знак  $\mp$  в резонансном знаменателе относится к право- или левополяризованным (обыкновенной и необыкновенной) волнам. В резонансной области это уравнение можно упростить:

$$\frac{\partial f_0}{\partial t} = \pi \left(\frac{e}{m}\right)^2 \sum_k \left[ \left(1 - \frac{kv_z}{\omega_k}\right) \frac{1}{v_{\perp}} \frac{\partial}{\partial v_{\perp}} v_{\perp} + \frac{kv_{\perp}}{\omega_k} \frac{\partial}{\partial v_z} \right] |E_k|^2 \delta(\omega_k - kv_z \pm \omega_H) \times \\ \times \left[ \left(1 - \frac{kv_z}{\omega_k}\right) \frac{\partial}{\partial v_{\perp}} + \frac{kv_{\perp}}{\omega_k} \frac{\partial}{\partial v_z} \right] f_0. \quad (2.147)$$

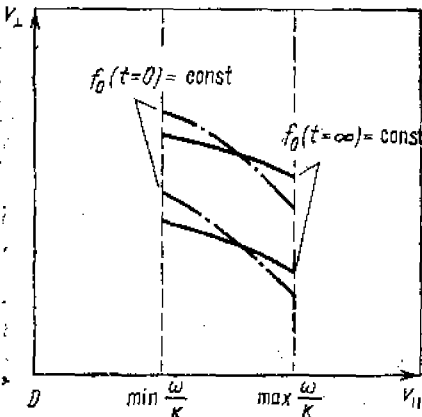


Рис. 2.23. «Линии уровня» в плоскости  $v_{\perp}, v_z$  в результате квазилинейной релаксации волнового пакета свистов в плазме

В качестве примера применения уравнения (2.147) рассмотрим задачу о поглощении частицами одномерного волнового пакета. Резонансная область скоростей  $v_z$ , соответствующая такому волновому пакету, изображена на рис. 2.23. Она лежит в левой полуплоскости, так как  $v_z = (\omega - \omega_H) / k$  отрицательно для свистов ( $\omega < \omega_H$ ). Окружности изображают линии уровня для первоначально изотропного распределения по скоростям. Так же, как и в квазилинейной теории леигмюровских колебаний, резонансные частицы диф-

фундируют до тех пор, пока не достигается установившееся состояние «плато». Для достаточно узкого волнового пакета  $[\Delta(\omega/k) \ll \ll \omega/k]$  установившееся состояние таково, что

$$\{[1 - (kv_z/\omega)] (\partial f_0/\partial v_\perp) + (kv_\perp/\omega) (\partial f_0/\partial v_z)\} = 0. \quad (2.148)$$

При достижении такого состояния диффузия прекращается, как это видно из сравнения (2.148) с уравнением (2.147). Это условие определяет плато для рассматриваемого случая по аналогии с условием  $df_0/dv=0$  (плато в квазилинейной теории ленгмюровских колебаний). Линии уровня установившегося распределения по скоростям (линии равных значений функции распределения), удовлетворяющего уравнению (2.148), определяются уравнением

$$\frac{v_\perp^2 + v_z^2}{2} - \frac{\omega v_z}{k} = \text{const} \quad (2.149)$$

В этом можно убедиться, если функцию распределения вида  $f[(v_\perp^2 + v_z^2)/2 - \omega v_z/k]$  подставить в уравнение (2.147). Линии уровня представляют собой окружности, но их центры смещены вправо на расстояние  $\omega/k$  (см. рис. 2.21). Сравнивая условия «плато» с уравнением (2.115) для декремента затухания, видим, что декремент затухания свистов в состоянии плато обращается в нуль (аналогично случаю ленгмюровских колебаний).

Квазилинейная диффузия такого типа, если она возникает в результате неізотропной неустойчивости плазмы в ловушке с магнитными пробками, например в магнитосфере, приводит к диффузии вектора скорости частиц из области удержания в конус потерь.

Оказывается, что в условиях магнитосферы Земли это важнейший механизм, определяющий время жизни частиц в радиационных поясах.

Эта диффузия связана с возбуждением электромагнитных волн типа свистов. Однако к диффузии в конус потерь может приводить и другой механизм, связанный с возбуждением электростатических колебаний. В лабораторных магнитных ловушках плазма помещена в сильное магнитное поле и, как правило, электронная циклотронная частота превышает плазменную. Электроны в этих условиях оказываются замагниченными.

Рассмотрим колебания, электрический вектор в которых почти перпендикулярен к магнитному полю. Из-за замагниченности электронов их движение при колебаниях происходит не вдоль электрического вектора, как в изотропной плазме, а только вдоль магнитного поля (рис. 2.24). В результате частота колебаний существен-

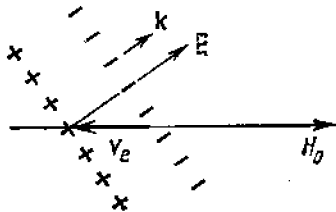


Рис. 2.24. Ленгмюровские колебания электронов в сильном магнитном поле



но уменьшается по сравнению с электронной плазменной  $\omega_{pe}$ , и такие низкочастотные колебания могут оказаться в резонансе с захваченными в ловушку ионами.

Действительно, из дисперсионного уравнения продольных колебаний плазмы (2.96) следует, что при  $\omega_{pe} \ll \omega_{He}$  частота электронных ленгмюровских колебаний в замагниченной плазме

$$\omega = \omega_{pe} \cos \theta \quad (2.150)$$

(см. рис. 2.14, вторая ветвь колебаний).

Покажем, что взаимодействие этих колебаний с захваченными в ловушку ионами действительно приводит к неустойчивости. При не слишком малых значениях отношения  $k_z/k$  частота  $\omega$  остается все же существенно больше ионной циклотронной частоты. В этом случае магнитное поле не влияет на взаимодействие ионов с волной (незамагниченные ионы) и эффективное взаимодействие имеет место при условии выполнения резонанса Ландау. Тогда влияние магнитного поля на ионы проявляется только в том, что магнитное поле «размещивает» их функцию распределения по углам ларморовского вращения. Поэтому функция распределения ионов в ловушке имеет вид

$$f_0(\mathbf{v}) = f_0(v_x^2 + v_y^2, v_z). \quad (2.151)$$

Ионы с достаточно малой поперечной скоростью  $v_\perp \leq v_z \sqrt{H_m/H_0 - 1}$  ( $H_m/H_0$  — «пробочное» отношение) попадают в конус потерь и уходят из ловушки. В результате этого функция распределения ионов в ловушке имеет вид, представленный на рис. 2.25. Покажем, что при такой функции распределения ионов всегда существуют распространяющиеся почти перпендикулярно к магнитному полю неустойчивые электростатические колебания, и определим фазовые скорости этих колебаний.

Пусть для определенности волна распространяется по оси  $y$ . Инкремент неустойчивости  $\gamma \sim \partial g / \partial v_y$ , где  $g$  — функция распределения, проинтегрированная по поперечным (по отношению к волне) компонентам скорости  $v_x, v_z$ . Для возникновения неустойчивости необходимо, чтобы

$$\frac{\partial}{\partial v_y} \int f(v_\perp^2, v_z) dv_x dv_z \Big|_{v_y = \omega/k} > 0. \quad (2.152)$$

Левую часть этого неравенства распишем следующим образом, переходя к интегрированию по полярным координатам  $v_\perp, \varphi$ :

$$\begin{aligned} & \int dv_x dv_y dv_z (\partial / \partial v_y) f(v_\perp^2, v_z) \delta(v_y - \omega/k) = \\ & = (2\omega/k) \int v_\perp dv_\perp d\varphi dv_z (\partial / \partial v_\perp^2) f(v_\perp^2, v_z) \delta(v_\perp \sin \varphi - \omega/k). \end{aligned}$$

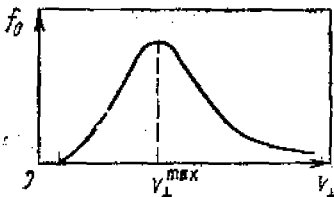


Рис. 2.25. Функция распределения с «конусом потерь»

Интеграл по  $\varphi$  легко вычисляется, и в итоге условие неустойчивости записывается следующим образом:

$$\int (\partial f / \partial v_{\perp}^2) dv_{\perp}^2 dv_z / \sqrt{v_{\perp}^2 - \omega^2/k^2} > 0. \quad (2.153)$$

Если бы в подынтегральном выражении отсутствовал множитель  $[v_{\perp}^2 - \omega^2/k^2]^{-1/2}$ , то для функции распределения (см. рис. 2.23) интеграл в левой части неравенства (2.153) обратился бы в нуль. Интеграл положителен при выполнении условия

$$\omega/k < v_{\perp}^{\max}, \quad (2.154)$$

поскольку в этом случае при интегрировании по  $v_{\perp}$  наиболее существенна область, где  $\partial f_0 / \partial v_{\perp}^2 > 0$ . Таким образом, неустойчивыми оказываются все колебания с фазовыми скоростями, удовлетворяющими неравенству (2.154).

Условие возникновения неустойчивости, так же как и инкременты нарастания, конечно, можно получить и из дисперсионного уравнения ленгмюровских колебаний, приведенного в ч. I. В этом уравнении необходимо учесть, что электроны замагничены, а в резонанс с колебаниями могут попадать только ионы, и, следовательно, только их нужно рассматривать в кинетическом приближении. Функция распределения ионов определяется формулой (2.151). С учетом этих замечаний дисперсионное уравнение преобразуется следующим образом:

$$\left[ 1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2} \cos^2 \theta - \frac{4\pi e^2}{m_i k^2} \int k (\partial f_0^i / \partial v) (kv - \omega)^{-1} dv \right] = 0. \quad (2.155)$$

Будем считать, что ионы определяют только мнимую часть частоты, и соответственно этому в последнем слагаемом учтем только мнимую часть резонансного знаменателя:

$$\text{Im} [1/(kv - \omega)] = \pi \delta(kv - \omega).$$

Преобразуем интеграл по скоростям, переходя к полярным координатам  $v_{\perp}$ ,  $\varphi$ ,  $v_z$  и интегрируя по  $\varphi$ :

$$\begin{aligned} & \int k (\partial f_0 / \partial v_{\perp}) \sin \varphi \delta(kv_{\perp} \sin \varphi - \omega) v_{\perp} dv_{\perp} d\varphi dv_z = \\ & = \omega \int \frac{1}{v_{\perp}} \frac{\partial f_0}{\partial v_{\perp}} \frac{1}{\sqrt{k^2 v_{\perp}^2 - \omega^2}} v_{\perp} dv_{\perp} dv_z \Big|_{v_{\perp} \geq \frac{\omega}{k}} \end{aligned}$$

Окончательно получим следующее дисперсионное уравнение:

$$1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2} \cos^2 \theta - \frac{4\pi^2 e^2}{m_i k^2} \omega \int \frac{\partial f_0}{\partial v_{\perp}^2} \frac{1}{\sqrt{k^2 v_{\perp}^2 - \omega^2}} dv_{\perp}^2 dv_z = 0. \quad (2.156)$$

Из этого уравнения следует, что частота колебаний определяется формулой (2.150), а инкремент нарастания амплитуды

$$\gamma = \frac{2\pi^2 e^2}{m_1} \frac{\omega^2}{k^2} \int_{v_{\perp} \geq \omega/k} \frac{\partial f_0}{\partial v_{\perp}} \frac{dv_{\perp}^2 dv_z}{V k^2 v_{\perp}^2 - \omega^2} \quad (2.157)$$

[см. условие возникновения неустойчивости (2.153)]. Возникающая при выполнении условия (2.153) неустойчивость хорошо известна в физике плазмы. Это так называемая конусная неустойчивость, которая должна весьма существенно влиять на динамику частиц в ловушках с сильным магнитным полем. Из-за неустойчивости функция распределения, показанная на рис. 2.23, должна переходить в состояние с плато в той области скоростей, где первоначально  $\partial f_0 / \partial v_{\perp} > 0$ . В этом случае происходит диффузия частиц в пространстве скоростей в сторону убывания  $v_{\perp}$ , т. е. уход частиц в конус потерь. Таким образом, развитие конусной неустойчивости должно стать причиной быстрого ухода плазмы из ловушки.

### § 2.9. Равновесие плазмы в магнитном поле

Подобно тому как в механике обычной жидкости простейшим случаем является гидростатика, т. е. раздел гидродинамики, изучающий равновесие жидкой или газообразной среды, в магнитной гидродинамике плазмы можно выделить раздел о равновесии плазмы в магнитном поле. В таких состояниях левая часть магнитогидродинамического уравнения Эйлера (2.57), описывающая инерцию плазмы, полагается равной нулю, и в результате получается уравнение

$$(1/c) [\mathbf{j} \times \mathbf{H}] = \text{grad } p, \quad (2.158)$$

означающее, что сумма объемных сил, действующих на плазму, равна нулю в любой точке внутри плазмы.

Первым следствием условия равновесия плазмы (2.158) является постоянство ее давления вдоль силовых линий магнитного поля, так как  $[\mathbf{j} \times \mathbf{H}] \perp \mathbf{H}$ . В произвольном случае магнитное поле может иметь довольно сложный характер и свойства равновесного состояния плазмы оказываются непростыми. Задачи такого рода имеют важное значение в проблеме управляемого термоядерного синтеза. Здесь же мы рассмотрим простейший случай равновесия плазмы в магнитном поле с прямолинейными и параллельными друг другу силовыми линиями магнитного поля, иначе говоря, равновесие плазмы в продольном магнитном поле. Магнитное поле имеет только одну компоненту  $H_z$ , которая является функцией координат  $x$  и  $y$  (в плоскости, перпендикулярной к полю). В этом случае условие равновесия принимает вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial x} &= -(1/8\pi) \frac{\partial H_z^2}{\partial x}, \\ \frac{\partial p}{\partial y} &= -(1/8\pi) \frac{\partial H_z^2}{\partial y}. \end{aligned} \quad (2.159)$$

Следовательно,

$$p + H^2_z/8\pi = \text{const.} \quad (2.160)$$

Это соотношение показывает, что магнитное давление  $H^2/8\pi$  за пределами области, занятой плазмой, больше, чем внутри нее, на величину  $p_{\text{max}}$ . Максимальное давление, при котором плазма может удерживаться полем заданной напряженности  $H_0$ , определяется из условия

$$p_{\text{max}} = H_0^2/8\pi. \quad (2.161)$$

Видно, что магнитное поле внутри плазмы оказывается меньше внешнего поля; это следствие того, что плазма представляет собой диамагнетик. В этом случае плазма должна полностью вытеснить поле из занимаемой ею области пространства.

До сих пор, говоря о равновесии плазмы в магнитном поле, мы использовали лишь одно из уравнений магнитной гидродинамики — уравнение Эйлера, в котором считали  $du/dt = 0$ . Выясним, совместимо ли это допущение с остальными уравнениями магнитной гидродинамики. Исходя из уравнения

$$\frac{\partial H_z}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(u_x H_z) + \frac{\partial}{\partial y}(u_y H_z) = \frac{c^2}{4\pi\sigma} \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) H_z, \quad (2.162)$$

приходим к выводу о неизбежности диффузии магнитного поля внутрь объема, занимаемого плазмой, т. е. в область более слабого поля. Таким образом, магнитное поле, вообще говоря, будет изменяться во времени. Но тогда давление плазмы, жестко связанное с магнитным давлением условием равновесия (2.160), тоже должно меняться, т. е. будет происходить изменение распределения плазмы в пространстве. Этот встречный процесс также имеет диффузионный характер. Коэффициент диффузии плазмы, очевидно, имеет такой же порядок величины, как и  $D_M = c^2/4\pi\sigma$ , если давление плазмы сравнимо с давлением магнитного поля  $p \sim H^2/8\pi$ .

Уравнение, описывающее процесс диффузии плазмы в магнитном поле при  $p \ll H^2/8\pi$ , можно вывести следующим образом. Равновесие плазмы достигается в результате протекания тока плотностью

$$\mathbf{j} = (c/H) \nabla p. \quad (2.163)$$

Электрический ток связан с относительным движением электронов и ионов плазмы со скоростью  $\mathbf{j}/en$ . Электрическое сопротивление такому току есть следствие силы трения между электронами и ионами плазмы:

$$\mathbf{F} = m_e (\mathbf{j}/en) \nu_{ei}, \quad (2.164)$$

где  $\nu_{ei} = 1/\tau_{ei}$  — время свободного пробега электронов по отношению к соударениям с ионами. Точно так же, как рассматривался дрейф заряженных частиц под действием произвольной силы  $\mathbf{F}$ , можно говорить о дрейфе электронов и ионов под действием силы трения. Скорость такого дрейфа

$$\mathbf{u}_d = c (m_e/eH^2 n) \nu_{ei} [\mathbf{j} \times \mathbf{H}]. \quad (2.165)$$

Она одинакова для ионов и электронов, поскольку разные знаки зарядов ионов и электронов компенсируются взаимно противоположными направлениями сил трения. Поэтому в процессе такого дрейфа электрическая нейтральность плазмы не нарушается. Подставим теперь найденную скорость  $u_d$  движения плазмы под действием сил трения в уравнение непрерывности. Получим уравнение диффузии

$$\partial n / \partial t = -\operatorname{div} nu_d \approx (c^2 p / \sigma H^2) \Delta n. \quad (2.166)$$

В результате проведенного анализа можно сделать вывод, что в реальном случае плазмы с конечной электропроводностью строго равновесия не существует, так как скорость плазмы отлична от нуля. Это значит, что инерционный член в уравнении Эйлера, вообще говоря, не обращается в нуль и можно говорить лишь о приближенном выполнении условия равновесия. Это условие выполняется с тем большей точностью, чем меньше относительная величина инерционного члена.

Допустим, что  $\tau_p$  — характерное время, за которое происходит изменение плотности плазмы. Тогда сделанное приближение справедливо при условии

$$|nm_i u / \tau_p| \ll (1/c) |j \times H|.$$

Подставляя  $u$  из (2.165), получаем

$$1 / \omega_H \tau_p \ll \omega_{He} \tau_{ei}. \quad (2.167)$$

Отсюда видно, что чем выше степень замагниченности плазмы, тем с большим правом можно говорить о ее равновесии.

Из рассмотренной картины диффузии плазмы в магнитном поле вытекает еще одно следствие: диффузия связана со столкновениями между частицами разного сорта — между электронами и ионами (столкновения между одинаковыми частицами в рассмотренном приближении не приводят к диффузии, так как не дают силы трения). Используя уравнение диффузии плазмы (2.166), нетрудно оценить время диффузии (т. е. время, за которое распределение плотности плазмы существенно изменится). Это время

$$\tau_p \sim L_p^2 / D_{\perp} \sim L_p^2 H_0 / c^2 p. \quad (2.168)$$

Таким образом, данное равновесие плазмы имеет конечное время жизни порядка  $\tau_p$ .

Полезно привести еще один вывод коэффициента диффузии плазмы поперек магнитного поля, рассматривая случайные блуждания частиц вследствие столкновений. За время одного свободного пробега  $\tau_{ei}$  электрон в среднем испытывает одно кулоновское столкновение, в результате которого он смещается в плоскости, перпендикулярной к  $H$ , на расстояние порядка ларморовского радиуса  $r_{He}$ . При многократных столкновениях согласно статистическим законам складываются квадраты отдельных смещений. Поэтому за время  $t$  частица сместится перпендикулярно к  $H$  на рас-

стояние

$$\Delta x \sim r_{He} \sqrt{t/\tau_{ei}}. \quad (2.169)$$

Кроме того, среднее смещение при таком диффузионном процессе должно быть порядка  $\sqrt{D_{\perp} t}$ . Следовательно,

$$D_{\perp} \sim r_{He}^2 / \tau_{ei}. \quad (2.170)$$

Вследствие квазинейтральности плазмы скорость ее диффузии в направлении, перпендикулярном к  $H$ , должна практически совпадать со скоростью диффузии электронов, так как при сравнимых значениях температуры электроны из-за меньшей величины ларморовского радиуса блуждают поперек поля гораздо медленнее, чем ионы. Поэтому формула (2.170) дает оценку коэффициента диффузии для плазмы в целом. Среднее время между двумя столкновениями  $\tau = m\sigma/nv^2$ . Поэтому

$$D_{\perp} \sim r_H^2 / \tau \sim v^2 / m^2 \sigma^2 n e^2 / e^2 H^2 m_e \sigma \sim c^2 p / \sigma H^2. \quad (2.171)$$

По порядку величины этот результат совпадает с найденным ранее коэффициентом диффузии (2.166).

В диффузию рассмотренного типа дают вклад только столкновения электронов с ионами, но не электронов между собой. Это обстоятельство может ускользнуть от внимания, если ограничиться лишь грубой моделью случайных блуждений. Вот почему макроскопический подход, основанный на силе трения, особенно полезен. Он автоматически учитывает, что столкновения между электронами не создают средней силы трения, а следовательно, и диффузионного дрейфа.

Очевидно, что теплопроводность плазмы в направлении, перпендикулярном к  $H$ , также должна резко снижаться при увеличении напряженности поля. В противоположность диффузии, которая обусловлена столкновениями между ионами и электронами, теплопередача в плазме поперек силовых линий происходит в основном в результате ион-ионных столкновений (если  $T_i$  не слишком мало по сравнению с  $T_e$ ). Это объясняется тем, что интенсивность теплопередачи зависит от ширины той области, в пределах которой при наличии градиента температуры перемешиваются траектории частиц с различной тепловой энергией. Коэффициент теплопроводности в направлении, перпендикулярном к  $H$ , пропорционален квадрату ширины области перемешивания, а эта ширина по порядку величины сравнима с ларморовским радиусом. Поэтому теплопередача в основном идет через ионную компоненту  $\chi_{\perp} \approx r_{Hi}^2 / \tau_{ii}$ .

Отсюда видно, что коэффициент ионной теплопроводности в направлении, перпендикулярном к силовым линиям, уменьшается примерно в  $(\omega_H \tau_{ii})^2$  раз по сравнению с тем значением, которое он имеет в отсутствие магнитного поля. Коэффициент поперечной теплопроводности для водородной плазмы можно вычислить, поль-

зуюсь следующей формулой:

$$\kappa_{\perp} \approx 2 \cdot 10^{-10} n^2 / H^2 \sqrt{T_i}. \quad (2.172)$$

В различных приложениях физики плазмы рассматриваются достаточно сложные типы равновесия плазмы в магнитном поле (так называемые магнитогидродинамические равновесные конфигурации). Однако и в таких произвольных случаях сохраняется основной вывод, сделанный здесь на примере магнитного поля, имеющего только одну компоненту: равновесие имеет условный характер, так как оно с течением времени разрушается из-за диффузии и теплоотвода. В сложных равновесных конфигурациях выражения для коэффициентов диффузии и теплопроводности плазмы поперек магнитного поля могут заметно отличаться от (2.171) и (2.172). Это можно понять, если вспомнить, насколько сложными могут быть дрейфовые траектории электронов и ионов в произвольных магнитных полях. В таких полях в качестве элементарного шага в схеме случайных блужданий частицы может входить величина, намного превышающая ларморовский радиус частицы. Некоторые эффекты такого типа, важные для исследований по управляемым термоядерным реакциям, рассмотрены в параграфе, посвященном токамаку.

## § 2.10. Примеры равновесия плазмы в магнитном поле. Токамак

Простейшим конкретным примером применения основных уравнений магнитогидродинамики (2.60), (2.63) может служить изолированный плазменный столб цилиндрической формы, удерживаемый магнитным полем протекающего в плазме продольного тока (рис. 2.26). При равновесии радиальный градиент давления в плазменном столбе должен быть равен электродинамической силе  $(1/c)j_z H_{\varphi}$ , где  $j_z$  — плотность продольного тока, а  $H_{\varphi}$  — напряженность магнитного поля тока. Силовые линии этого поля имеют кольцевую форму. Величины  $j_z$  и  $H_{\varphi}$  в случае цилиндрической симметрии связаны соотношением

$$j_z = (c/4\pi) (d/dr) (rH_{\varphi}),$$

следовательно,

$$-dp/dr = (1/4\pi) (H_{\varphi}/r) (d/dr) (rH_{\varphi}). \quad (2.173)$$

Отсюда

$$-\int_0^a (dp/dr) r^2 dr = (1/8\pi) a^2 H_{\varphi}^2(a). \quad (2.174)$$

Здесь верхний предел интегрирования по  $r$  принят равным радиусу сечения плазменного цилиндра  $a$ . На границе плазмы  $p=0$ . По-

этому

$$-\int_0^a (dp/dr) r^2 dr = 2 \int_0^a p r dr = \bar{p} a^2 \quad (2.174a)$$

где  $\bar{p}$  — среднее значение давления плазмы в столбе. Из (2.174) и (2.174a) следует, что  $\bar{p}$  пропорционально квадрату напряженности магнитного поля на границе плазмы:

$$\bar{p} = H_\varphi^2(a) / 8\pi.$$

Образование плазменного столба, удерживаемого давлением магнитного поля протекающего по нему тока, носит название линейного пинч-эффекта. При пропускании тока через прямую разрядную трубку, заполненную газом, сначала должна возникнуть плазма (в результате ионизации газа), затем под действием электродинамических сил она начинает сжиматься и в результате может образоваться стянутый к оси плазменный столб. Ток в этом случае выполняет сразу три функции: он создает плазму, нагревает ее за счет джоулева тепла и уравнивает давление плазмы в сжатом плазменном столбе с помощью давления собственного магнитного поля. В начальный период исследований по физике высокотемпературной плазмы этот метод достижения высоких температур благодаря своей кажущейся простоте представлялся очень перспективным.

Казалось, что если пропустить через газ при низком давлении импульсный ток достаточно большой силы, то за ничтожный промежуток времени в разрядной трубке возникнет раскаленный плазменный шнур с огромной температурой.

Однако практически в экспериментах с такой геометрией не удалось поднять температуру плазмы выше  $\sim 1 \cdot 10^6$  К, и то всего лишь на несколько микросекунд. Как показали эксперименты, развитие кратковременного импульсного разряда с большой силой тока не приводит к образованию квазистационарного состояния, описываемого условием равновесия (2.173). Постфактум сейчас можно сказать, что при некоторой проницательности это можно было бы предвидеть заранее. Не учтенным оказался важнейший физический фактор — неустойчивость «гибкого» проводника, каковым является плазменный столб с током. За очень короткий промежуток времени (в обычных условиях эксперимента — за несколько микро-

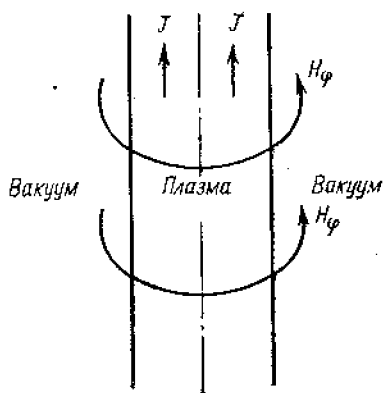


Рис. 2.26. Равновесие плазменного столба, удерживаемого магнитным полем собственного осевого тока (пинч)



секунд) в плазменном шнуре развиваются деформации, напоминающие «перетяжки» и «изгибы» (рис. 2.27). Они разрушают правильную геометрическую структуру плазменного образования, в результате чего плазма начинает сильно взаимодействовать со стенками и быстро охлаждается.

На этом конкретном примере мы впервые встретились с одной из центральных проблем физики плазмы — проблемой устойчивости плазменных конфигураций. Общий анализ относящегося сюда широкого комплекса явлений составит содержание ряда следующих параграфов.

Хотя первая попытка получить высокотемпературную плазму в равновесном состоянии путем использования линейного пин-эффекта оказалась неудачной, однако дальнейшее развитие этой основной идеи в конце концов увенчалось успехом. Два основных элемента, добавленных в процессе развития к первоначальной идее, состояли: 1) в стабилизации неустойчивости «мягкого» плазменного проводника с током при помощи сильного продольного поля

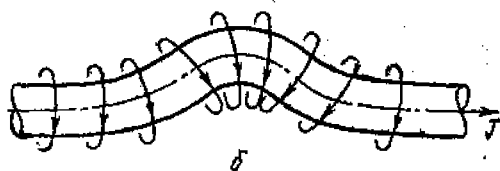
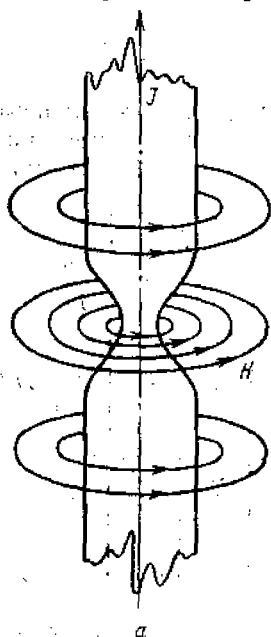


Рис. 2.27. Деформации типа «перетяжка» (а) и «изгиб» (б)

внешнего происхождения. Силовые линии продольного поля образуют как бы жесткий каркас, препятствующий нарастанию любых макроскопических деформаций в плазменном шнуре, и 2) в замыкании плазменного цилиндра в кольцо для устранения потерь энергии на концах (при наличии концов, опирающихся на электроды, невозможно получить плазму в квазистационарном состоянии с достаточно высокой температурой).

Итак, мы пришли к системе, получившей название «токамак». Она изображена на рис. 2.28. Кольцевой плазменный виток удерживается в равновесии магнитным полем тока  $H_{\phi}$  и стабилизируется продольным полем  $H_z$ . Ток в плазме можно создать индукционным путем (например, надев камеру, в которой должен образоваться плазменный виток, на сердечник трансформатора). Однако, как нетрудно видеть, для того чтобы добиться равновесия плазмы, кроме полей  $H_{\phi}$  и  $H_z$  нужно ввести также поле  $H_{\perp}$ , на-

правленное вдоль главной оси тороидальной системы (перпендикулярно к плазменному кольцу). Это поле необходимо для того, чтобы скомпенсировать электродинамическую силу радиального расталкивания кольцевого плазменного тока. При взаимодействии поля  $H_{\perp}$  с током  $I$  возникает сила  $(1/c)IH_{\perp}$  (на единицу плазменного кольца). При указании на рис. 2.28 направления  $H_{\perp}$  эта сила в каждом элементе кольца направлена по радиусу к оси тороидальной системы.

В обычных условиях  $|H_{\perp}| \ll |H_{\varphi}(a)|$ , поэтому присутствие  $H_{\perp}$  не нарушает общей картины поля. Линии результирующего магнитного поля имеют винтовую структуру. Они навиваются вокруг

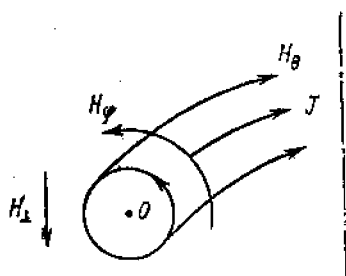


Рис. 2.28. Магнитное поле и ток в токамаке

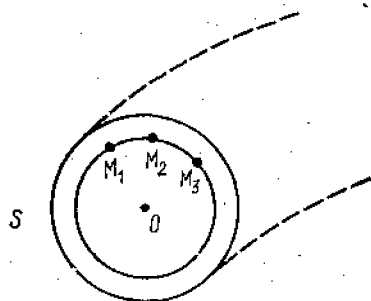


Рис. 2.29. Тороидальные магнитные поверхности

кольцевой осевой линии плазменного витка. Как было указано в § 2.2, в таком поле траектории заряженных частиц принадлежат к двум различным классам: существуют «пролетные» и «запертые» частицы. Рассматриваемая как единое целое, плазма свободно растекается вдоль винтовых силовых линий.

Прежде чем заниматься анализом условий равновесия в такой тороидальной системе, следует обратить внимание на одну характерную для нее черту топологии магнитного поля. Пусть плоскость  $S$  представляет собой поперечное сечение системы. Силовая линия, проходящая через точку  $M_1$  на этой плоскости, обходя один раз вокруг тороида, пересечет плоскость  $S$  в точке  $M_2$ , в следующий раз — в точке  $M_3$  и т. д. (рис. 2.29). Множество точек  $M_1, M_2, M_3, \dots$  в общем случае будет бесконечным. Однако для некоторых линий поля оно может быть конечным, и это означает, что такая линия поля замыкается сама на себя. Это так называемые вырожденные линии. К их числу, в частности, принадлежит осевая линия витка, на которой поле тока обращается в нуль. Ее след (см. рис. 2.28) обозначен буквой  $O$ .

Поведение силовой линии, многократно обходящей вдоль тороида, определяется положением изображающих точек  $M_1, M_2, \dots$ . Пусть после нескольких обходов точка  $M$  приблизилась к началу

ной точке  $M_1$ . При следующем обходе угол поворота вокруг  $O$  будет уже больше  $2\pi$ . Где в таком случае расположится следующая точка? Естественно предположить, что  $M_{n+1}$  лежит между  $M_1$  и  $M_2$ , следующая  $M_{n+2}$  — между  $M_2$  и  $M_3$  и т. д., и после многих обходов изображающие точки образуют гладкую замкнутую кривую. В таком случае можно говорить о существовании семейства магнитных поверхностей. Каждая из них, образно выражаясь, изготовлена из одной бесконечной силовой линии. Линия поля, порождающая магнитную поверхность, плотно устилает ее.

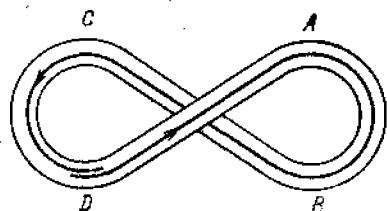


Рис. 2.30. Стелларатор — «восьмерка». Стрелками обозначена силовая линия

Магнитные поверхности в том же случае образуют множество вложенных друг в друга тороидов. В континууме этих тороидов каждый, взятый наудачу, образуется одной силовой линией. Однако среди магнитных поверхностей есть счетное множество «вырожденных», которые создаются замкнутыми силовыми линиями.

В этом случае на поверхности укладывается непрерывное множество линий поля, смещенных друг относительно друга. Л. Спитцер высказал гипотезу о том, что магнитные поверхности существуют также и для таких тороидальных полей, в которых винтовые силовые линии, поворачивающиеся вокруг кольцевой оси, создаются только с помощью внешних источников специальных винтовых обмоток) или же деформацией всей магнитной системы — например, превращением кольцевого соленоида в восьмерку (рис. 2.30).

Однако теоретический анализ показывает, что в случае таких несимметричных полей можно говорить о системе вложенных друг в друга магнитных поверхностей лишь в некотором приближении. В общем случае структура магнитного поля является довольно сложной. Отдельные магнитные поверхности оказываются разделенными системой тороидальных трубок («волокон»), между которыми силовые линии ведут себя совершенно хаотически. Очевидно, что вопрос о существовании магнитных поверхностей имеет большое значение для перспективы использования различных магнитных систем для удержания горячей плазмы. Поскольку плазма свободно растекается вдоль силовых линий, ее давление  $p$  в условиях равновесия должно быть одинаковым в разных точках одной и той же магнитной поверхности.

Таким образом, магнитные поверхности представляют собой семейство плазменных изобар. Если (вместо того чтобы обрисовывать плавную кривую) «изображающие» точки  $M_1, M_2, \dots$  заполнят некоторую широкую зону в поперечном сечении плазменного витка, то в пределах этой зоны плазма может находиться в равновесии только при условии  $\text{grad } p = 0$ . Очевидно, что обращение

в нуль градиента давления в сечении плазменного витка равносильно появлению аномально большой утечки плазмы в направлении, перпендикулярном к  $H$ .

Представляет немалый интерес хотя бы вкратце разобрать вопрос о топологии магнитных поверхностей. Если заданы источники магнитного поля, т. е. система электрических токов, то вектор магнитного поля  $\mathbf{H}(\mathbf{r})$  можно в принципе считать заданным (вычисленным по формуле Био—Савара). Это позволяет написать систему уравнений для силовых линий магнитного поля, используя их определение как линий, касательная к которым параллельна  $\mathbf{H}$  в каждой точке. Оказывается, что найти решение этой, казалось бы, простой системы уравнений в общем случае не так-то просто.

Основная идея подхода к этой проблеме заключается в использовании, на первый взгляд, неожиданной аналогии с гамильтоновыми уравнениями динамики материальной точки. В данном случае это означает, что координата вдоль силовой линии играет роль времени, а некий «гамильтониан», описывающий силовые поля, в которых «движется» рассматриваемая материальная точка, тогда должен быть периодической функцией времени. Теперь становится понятной сложность задачи. Ведь в классической механике вопрос об устойчивости движения с такими гамильтонианами сводится к знаменитой проблеме о так называемых малых резонансных знаменателях. Формально разложение в ряд Фурье нелинейной периодической функции содержит бесконечное число членов с потенциальной возможностью соответственно бесконечного числа резонансов.

Весьма сходная проблема небесной механики — о движении планет при учете возмущающего резонансного влияния друг на друга — как известно, приводит к неустойчивости множества возможных орбит и выделению некоторых устойчивых состояний.

«Резонансные» возмущения, нарушающие тороидальную симметрию магнитного поля в токамаке, могут создаваться не только из-за неидеальной геометрии наружных проводников с током, но и в результате внутренних неоднородностей собственного тока, текущего по плазме. Такие неоднородности могут быть и следствием мелкомасштабных неустойчивостей плазмы. В предельном случае достаточно сильных микрон неоднородностей поведение силовых линий магнитного поля может напоминать стохастическое движение броуновской частицы. Такое стохастическое разрушение структуры магнитных поверхностей может стать препятствием для длительного удержания плазмы в термоядерных ловушках.

Эти качественные рассуждения можно проиллюстрировать на примере разрушения плоских магнитных поверхностей при наложении мелкомасштабного возмущающего поля. Пусть магнитные силовые линии являются прямыми, лежащими в плоскостях  $yz$ . Напряженность этого поля примем постоянной и равной  $H_0$ . Примем угол между  $H_0$  и осью  $z$  зависящим от координаты  $x$ . Если при  $x=0$   $H_0 \parallel Oz$ , то вблизи  $x=0$  простейшей формой такой зависимости

может служить  $H_y = (x/L_s)H_0$ . Физически для реализации описываемого поворота силовых линий нужно иметь электрический ток, текущий вдоль силовых линий по плазме.

Наложим возмущающее магнитное поле  $H_x = H_{\perp} \cos(k_z z + k_y y)$ .

Тогда «уравнения движения» для силовых линий с учетом возмущений можно записать в виде  $dx/dl = (H_{\perp}/H_0) \cos(k_z z + k_y y)$ ,  $dy/dl = x/L_s$ , где  $l$  — координата вдоль силовой линии  $H_0$ . Интегри-

руя второе из этих уравнений, получаем  $y = x_0 l/L_s + (1/L_s) \int_{x_0}^x x dl$ .

Выберем  $x_0$ , удовлетворяющее условию  $k_z = -k_y(x_0/L_s)$ . Оно означает, что возмущение находится «в резонансе» с невозмущенной силовой линией в плоскости  $x = x_0$ , иначе говоря, фаза возмущения постоянная вдоль  $l$ . При этом условии

$$dx/dl = (H_{\perp}/H_0) \cos\left(\frac{k_y}{L_s} \int x dl\right). \quad (2.175)$$

Теперь немедленно воспользуемся аналогией с уравнением движения электрона в поле монохроматической электростатической волны при условии резонанса  $\omega/k = v_0$  ( $v_0$  — невозмущенная скорость):

$$dv/dt = \frac{e}{m} E \cos\left(k \int v dt\right).$$

Правила соответствия очевидны:

$$H_{\perp}/H_0 \longleftrightarrow (e/m)E; \quad k_y/L_s \rightarrow k; \quad x \longleftrightarrow v.$$

Тогда ширина зоны захвата  $\Delta v = (e\phi/m)^{1/2} = (eE/km)^{1/2}$  электрона полем волны соответствует ширине  $\Delta x = (H_{\perp}/H_0)(L_s/k_y)^{1/2}$  зоны резонансного возмущения магнитного поля. Картина возникающего расщепления магнитных поверхностей на плоскости  $x, y$  в точности совпадает с картиной поведения фазовых траекторий частицы на

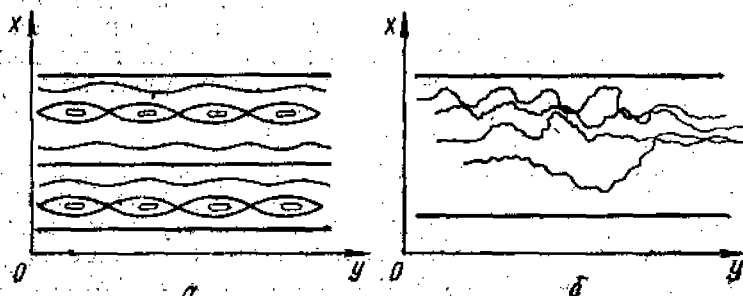


Рис. 2.31. «Резонансное» разрушение магнитных поверхностей: регулярное (а) и стохастическое (б), приводящее к броуновскому движению силовых линий

плоскости  $v, x$  (рис. 2.31,а). Аналогом осцилляции захваченных электронов на этом рисунке являются так называемые магнитные островки.

Для возмущения, представляющего собой суперпозицию отдельных гармоник  $H_x = \sum_{k_z, k_y} H_{\perp k} \cos(k_z z + k_y y)$ , нетрудно провести рас-

суждения, приводящие к установлению аналога квазилинейного приближения для электронов (см. § 1.16). Условием применимости такого приближения должно являться перекрытие зон резонансов соседних гармоник возмущения. Это квазилинейное уравнение, которое описывает стохастическое поведение силовых линий магнитного поля (см. рис. 2.31,б), легко написать по аналогии с (1.192), пользуясь введенными выше правилами соответствия:

$$\frac{\partial f_H}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \sum_{k_z, k_y} \frac{|H_{\perp k}|^2}{H_0^2} \operatorname{Im} \frac{1}{k_z + k_y \frac{x}{L_s}} \right) \frac{\partial f_H}{\partial x}.$$

В рассматриваемом приближении «диффузия» силовых линий описывается с помощью соответствующей плотности вероятности  $f_H(l, \gamma)$ .

После этого небольшого отступления проанализируем равновесие кольцевого плазменного витка, используя уравнения магнитной гидродинамики. В первом приближении можно считать, что плазменный виток имеет в поперечном сечении форму окружности радиуса  $a$ . Вне этого круга  $r$  и  $j$  обращаются в нуль. Тороидальная поверхность радиуса  $a$  представляет собой граничную поверхность плазменного витка, «оторвавшегося» от стенок вакуумной камеры, внутри которой этот виток находится. Вместе с тем это одна из магнитных поверхностей тороидального поля. Другим независимым параметром, определяющим геометрию системы, является большой радиус плазменного витка  $R$ . В дальнейшем будем предполагать, что  $a \ll R$  (это практически всегда выполняется в эксперименте). Заметим, что при малом отношении  $a/R$  плазменный виток по свойствам должен приближаться к прямому цилиндру.

Поскольку в задачу входят два главных параметра  $a$  и  $R$ , отвечающих двум степеням свободы, то нужно найти два условия равновесия витка — по малому и большому радиусам. Для первого можно пренебречь влиянием тороидальности и использовать уравнение равновесия, справедливое для прямого плазменного цилиндра. При этом плазма находится под действием полей  $H_\varphi$  и  $H_z$  (в первом приближении поле  $H_r$  роли не играет), и поэтому уравнение равновесия должно представлять собой обобщение соотношений (2.173) и (2.174). Такое обобщение можно получить, считая, что напряженность обоих полей и давление плазмы зависят только от  $r$  (т. е. от расстояния между данной точкой и точкой  $O$  в попе-

речном сечении). Простые вычисления показывают, что для равновесия необходимо, чтобы соблюдалось следующее равенство:

$$\bar{p} + \bar{H}_0^2/8\pi = H_0^2(a)/8\pi + H_\varphi^2(a)/8\pi, \quad (2.176)$$

где  $\bar{H}_0^2$  — усредненное значение  $H_0^2$  в плазме. Это равенство можно записать также в следующем виде:

$$2\pi a^2 \bar{p} = I^2/c + (H_0^2(a) - \bar{H}_0^2) a^2/4. \quad (2.177)$$

Более детальный анализ приводит к выводу, что соотношение (2.177) справедливо также и для тороидальной системы после внесения небольшого уточнения, которое относится к величине  $H_0(a)$ . При строгом расчете  $H_0(a)$  в (2.177) должно соответствовать  $H_0$  на поверхности плазмы при  $\varphi = \pi/2$  (рис. 2.32).

Выясним теперь происхождение и величину сил, которые могут вызвать изменение  $R$ . Существуют следующие причины их появления:

1. Согласно законам электродинамики в кольцевом проводнике с током должна возникать радиальная сила растяжения, пропорциональная  $I^2$ . При

$a/R \ll 1$  она равна  $(I^2/2c^2) (\partial \mathcal{L} / \partial R)$ , где  $\mathcal{L}$  — коэффициент самоиндукции проводника.

2. Плазменный виток должен растягиваться также под действием внутреннего внутреннего давления. Растягивающее усилие можно определить, вычислив

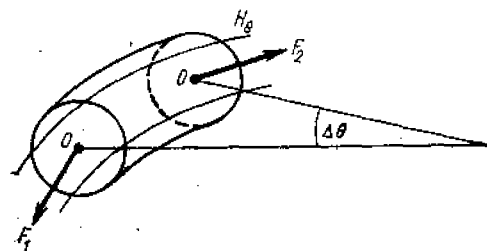


Рис. 2.32. Происхождение пондеромоторной силы, растягивающей виток по радиусу

работу, совершаемую давлением плазмы при бесконечно малом изменении  $R$ , и разделив эту работу на  $\delta R$ . Таким путем нетрудно найти, что полное растягивающее усилие равно  $2\pi^2 a^2 \bar{p}$ .

3. Существует также радиальная пондеромоторная сила, обусловленная различием в напряженности продольного магнитного поля вне и внутри плазмы. Механизм возникновения этой силы можно разъяснить, обратившись к рис. 2.32, на котором изображен небольшой отрезок плазменного витка. Кольцевые силовые линии внутри плазмы стремятся сократиться, вследствие чего возникают силы  $F_1$  и  $F_2$ , приложенные к торцам отрезка. Их равнодействующая направлена внутрь. Как нетрудно установить, она равна  $\bar{H}^2 a^2 \Delta\theta/3$ , где  $\Delta\theta$  — угловая длина отрезка. Если бы напряженность поля внутри и снаружи витка была одинакова, то эта сила должна была бы уравновешиваться боковым давлением силовых линий, поэтому результирующая сил бокового давления должна быть равна  $H^2(a) a^2 \Delta\theta/8$ . В общем случае при  $H^2(a) \neq \bar{H}^2$  остается разностный

эффект. В расчете на всю длину витка он дает силу радиального растяжения, равную

$$\frac{2\pi}{\Delta\theta} a^2 \frac{\Delta\theta}{8} [H^2(a) - \bar{H}^2] = \frac{\pi a^2}{4} [H^2(a) - \bar{H}^2]. \quad (2.178)$$

Для равновесия плазменного витка необходимо, чтобы сумма трех радиальных растягивающих усилий компенсировалась силой  $F_{\perp}$  взаимодействия тока  $I$  с поперечным полем  $H_{\perp}$ . Следовательно, условие равновесия по большому радиусу имеет вид

$$2\pi^2 a^2 \bar{p} + \frac{I^2}{2c^2} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial R} + \frac{\pi a^2}{4} [H^2(a) - \bar{H}^2] = 2\pi R \frac{H_{\perp} I}{c}. \quad (2.179)$$

Если плазменный виток создается внутри тороидальной камеры, изготовленной из материала с высокой электропроводностью, то коэффициент самоиндукции можно принять равным

$$\mathcal{L} = 2\pi R [\ln(b/a) + l_i], \quad (2.180)$$

где  $b$  — радиус поперечного сечения камеры;  $l_i$  — внутренняя индуктивность плазмы на единицу длины витка (при равномерном распределении тока по сечению  $l_i \approx 1/4$ , а при сильном скин-эффекте  $l_i \approx 0$ ). Используя (2.177) и (2.180), можно исключить из уравнения (2.179) член, содержащий  $H^2(a) - \bar{H}^2$ . В результате условие равновесия по  $R$  принимает вид

$$\frac{2\pi I^2}{c^2} \left[ \ln \frac{b}{a} + \frac{8\pi \bar{p}}{H_{\perp}^2(a)} + \frac{l_i - 1}{2} \right] = 2\pi R \frac{IH_{\perp}}{c}. \quad (2.181)$$

В установках, предназначенных для получения плазменных витков в режимах эксперимента с не очень большой длительностью, компенсация растягивающих усилий может происходить автоматически, так как при радиальном расширении шнура в проводящей оболочке камеры возникают токи Фуко. Они создают поперечную слагающую магнитного поля  $H_{\perp}$ , необходимую для компенсации растяжения. Как показывает несложный расчет, составляющая  $H_{\perp}$  пропорциональна  $I$  и смещению  $H_{\perp} \approx (2I/c)(\delta/b^2)$ .

Итак, равновесие должно устанавливаться при определенном смещении

$$\delta = (b^2/2R) [\ln b/a + 8\pi \bar{p}/H_{\perp}^2(a) + (l_i - 1)/2]. \quad (2.182)$$

В экспериментальных установках  $b \ll R$ , и поэтому равновесие устанавливается при относительно небольших смещениях плазмы относительно центра поперечного сечения камеры.

В режимах с большой длительностью компенсация растяжения с помощью токов Фуко оказывается недостаточной, и приходится создавать дополнительные источники поперечных полей, размещая кольцевые проводники с током вблизи камеры. С помощью таких проводников можно управлять положением витка в камере, изменяя величину  $\delta$ .



## § 2.11. Устойчивость границы плазмы в магнитном поле

Кроме диффузии существует еще одна причина распада равновесия плазмы в магнитном поле. Подобно тому как в механике равновесие тела или материальной точки в поле сил не всегда бывает устойчивым, плазма, обладающая, выражаясь формально, бесконечным числом степеней свободы, также может оказаться неустойчивой относительно малого отклонения от положения равновесия. Имеет смысл говорить лишь о таких неустойчивостях, которые разрушают равновесие плазмы за время меньше, чем время диффузии.

Допустим, что плазменная конфигурация находится в состоянии равновесия. Это означает, что все параметры, характеризующие свойства плазмы (плотность, температура, распределение частиц по скоростям), должны оставаться постоянными во времени. Будет ли такое состояние сохраняться длительное время или же под влиянием случайных флуктуаций параметров возникнут быстро нарастающие возмущения, которые вызовут резкое нарушение исходного равновесия плазмы? Такова в общей постановке задача об устойчивости.

Поскольку плазма представляет собой механическую систему с бесконечным числом степеней свободы, то в строгом смысле слова полный теоретический анализ ее устойчивости по отношению к разным видам возмущений может оказаться практически неосуществимым. Общепринятый подход, сложившийся к настоящему времени в физике устойчивости плазмы, состоит в последовательном рассмотрении различных неустойчивостей, начиная с самых простых моделей — магнитогиродинамических и постепенно усложняя их, чтобы ввести в рассмотрение эффекты конечной диссипации, многокомпонентность плазмы, кинетические эффекты.

Существенно, что различные механизмы нарушения равновесия допускают классификацию по скорости развития связанных с ними возмущений. Это позволяет ориентировать теорию на последовательное рассмотрение неустойчивостей и условий их стабилизации, начиная с тех, которые вызывают наиболее быстрые перемещения плазмы и поэтому являются самыми опасными. Наиболее же опасными нарушениями равновесия являются те, которые можно считать магнитогиродинамическими. При возмущениях магнитогиродинамического типа макроскопические участки плазмы могут приобрести скорости порядка тепловой скорости ионов. При таких возмущениях плазма ведет себя в магнитном поле аналогично идеально проводящей жидкости (или, точнее говоря, как идеальный проводник, лишенный собственной жесткости).

В связи с большими математическими трудностями обычно выделяют более простую задачу исследования устойчивости относительно возмущений малой величины или амплитуды. Метод используемого в этом случае теоретического анализа заключается в том,

что плазма с заданными равновесными параметрами, такими как плотность, температура, магнитное поле, подвергается малой виртуальной деформации, при которой возникают добавки к равновесным значениям тех же параметров. Судьба такого состояния плазмы затем прослеживается с помощью уравнений магнитной гидродинамики плазмы (если такая модель описания плазмы оправдана). Предположение о малости амплитуды облегчает математическое исследование этих уравнений, так как пренебрежение квадратами и более высокими степенями малых величин дает уравнения, линейные относительно неизвестных величин  $\rho$ ,  $u$ ,  $H$ . Но даже такая упрощенная (линейная) теория устойчивости для произвольных равновесных конфигураций оказывается довольно сложной.

Часто теории устойчивости плазмы приходится опираться на методы, разработанные в обычной гидродинамике.

Самый простой, но чрезвычайно важный вид неустойчивости равновесия плазмы удобнее всего проиллюстрировать на примере уже рассмотренного выше равновесия с резкой границей в продольном магнитном поле. Как будет видно из дальнейшего рассмотрения, почти все основные типы магнитогидродинамических неустойчивостей различных равновесных конфигураций «генетически» связаны с этим простейшим случаем. Поэтому неустойчивости плазмы с резкой границей посвящается отдельный параграф.

Итак, пусть плазма занимает полупространство  $x > 0$ . Магнитное поле внутри плазмы для начала положим равным нулю. При  $x < 0$  имеется магнитное поле, направленное вдоль оси  $z$  с давлением  $H_0^2/8\pi$ , уравновешивающим давление плазмы. Дополним рассмотренную здесь модель равновесия введением некоторой силы тяжести  $\rho g$ , направленной вниз по оси  $x$  (естественно, что речь идет о силе тяжести, компенсированной действием магнитного поля на плазму). Мы предположили, что магнитное поле при  $x = 0$  скачком меняется от нуля до  $H_0$ , т. е. границу плазмы считаем бесконечно тонкой. Мы уже знаем, что из-за диффузии магнитного поля внутрь плазмы (и встречной диффузии плазмы) толщина этой границы должна быть конечной. Поэтому сделанное выше предположение означает, что мы будем интересоваться только явлениями с пространственными масштабами (длинами волн неустойчивости, в данном случае), значительно превышающими толщину переходного слоя  $\delta$ . В частности, будем исследовать деформацию равновесия плазмы (см. рис. 2.31), представляющую собой волнообразное искривление поверхности раздела вдоль координаты  $y$  с длиной волны  $\lambda$ , значительно превышающей толщину переходного слоя.

Само наличие неустойчивости рассматриваемого равновесия плазмы очевидно из аналогии с известной в обычной гидродинамике неустойчивостью тяжелой жидкости над легкой в поле тяжести. Малая деформация поверхности раздела дает возможность «языкам» легкой жидкости всплывать в поле тяжести, «языки» же тя-

желой жидкости опускаются. В данном случае плазма играет роль тяжелой жидкости, магнитное же поле — легкой (в рассматриваемом случае можно говорить даже о невесомой жидкости).

Количественное описание неустойчивости такого рода можно дать с помощью подстановки малых величин  $\delta\rho$ ,  $u$ ,  $\delta p$  в уравнения магнитной гидродинамики. Так, изменение плотности должно описываться уравнением

$$\partial\delta\rho/\partial t + u \operatorname{grad} \rho_0 + \rho_0 \operatorname{div} u = 0, \quad (2.183)$$

в котором пренебрегается членом, содержащим произведение двух малых величин  $u$  и  $\delta\rho$ . Задача еще более упростится, если приближенно считать плазму несжимаемой жидкостью (такое приближение обычно справедливо при рассмотрении движений со скоростями, много меньшими скорости звука). Тогда из уравнения непрерывности получается условие несжимаемости  $\operatorname{div} u = 0$ , т. е.  $\partial u_x/\partial x + \partial u_y/\partial y = 0$ . Скорость плазмы можно найти из уравнения Эйлера  $\rho_0 \partial u/\partial t = -\operatorname{grad} \delta p$ , в котором также отброшены члены, содержащие произведение малых величин. Вместо скорости  $u$  удобно ввести другую переменную — смещение плазмы из положения равновесия  $\xi$ , определяемую с помощью формулы  $u = \partial\xi/\partial t$ .

Условие несжимаемости теперь принимает вид

$$\partial \xi_x/\partial x + \partial \xi_y/\partial y = 0, \quad (2.184)$$

а уравнение Эйлера

$$\rho_0 \partial^2 \xi/\partial t^2 = -\operatorname{grad} \delta p. \quad (2.185)$$

Эти уравнения, вообще говоря, нужно дополнить граничными условиями на границе, разделяющей плазму и магнитное поле, и уравнениями Максвелла для магнитного поля в области вне плазмы.

Но в рассматриваемой здесь частной задаче путь к ответу оказывается более простым. Смещение при волнообразной деформации с длиной волны  $\lambda$  зависит от  $y$  по гармоническому закону

$$\xi(x, y, t) = \tilde{\xi}(x) \exp(iky - i\omega t), \quad (2.186)$$

где  $k = 2\pi/\lambda$ , а  $\omega$  — собственное значение частоты, соответствующее волновому числу  $k$ . Подставляя искомый вид  $\xi$  (2.186) в уравнения (2.184) и (2.185), получаем

$$d\tilde{\xi}_x/dx + ik\tilde{\xi}_y = 0; \quad (2.187)$$

$$-\rho_0 \omega^2 \tilde{\xi}_x = -d\tilde{\delta p}/dx; \quad (2.188)$$

$$-\rho_0 \omega^2 \tilde{\xi}_y = ik\tilde{\delta p}. \quad (2.189)$$

Здесь учтено, что  $\delta p = \delta\tilde{p}(x) \exp(iky - i\omega t)$ . Из уравнений (2.188) и (2.189) можно исключить  $\delta\tilde{p}$ , если первое из них умножить на  $ik$ , второе продифференцировать по  $x$ , а затем сложить оба уравнения:

$$ik\tilde{\xi}_x + d\tilde{\xi}_y/dx = 0. \quad (2.190)$$

Из (2.190) определяем  $\tilde{\xi}_y$  и, подставляя его в уравнение (2.187), находим

$$d^2\tilde{\xi}_x/dx^2 - k^2\tilde{\xi}_x = 0. \quad (2.191)$$

Общее решение этого уравнения имеет вид суммы двух экспонент  $\exp(\pm k_y x)$  с произвольными коэффициентами. Из физических соображений ясно, что по мере удаления от границы  $x=0$  создаваемое волнообразное искривление первоначально плоской границы должно сказываться все слабее. По этой причине из двух возможных экспонент следует удерживать лишь затухающую при  $x \rightarrow \infty$ , т. е.

$$\tilde{\xi}_x = \tilde{\xi}_x \exp(-kx), \quad (2.192)$$

где  $\tilde{\xi}_x$  — постоянный коэффициент.

Изменение давления при смещении плазмы  $\delta p$  можно найти из следующих соображений. В равновесии действие силы тяжести внутри плазменного слоя уравнивается градиентом давления

$$\rho_0 g - dp_0(x)/dx = 0, \quad (2.193)$$

в результате чего давление плазмы должно зависеть определенным образом от координаты  $x$ :  $p = p(x)$ . При смещении на расстояние  $\xi_x$   $p = p_0(x + \xi_x)$ , и, раскладывая это выражение в ряд, получаем с учетом (2.193)

$$\delta p = (dp/dx) \xi_x = \rho_0 g \xi_x. \quad (2.194)$$

Далее подставляя (2.194) в уравнение (2.189), приходим к  $\omega^2 \tilde{\xi}_y = ik \tilde{\xi}_x \rho_0 g$ . Заменяв  $\xi_x$  на  $\xi_y$ , с помощью (2.190) легко получить  $\omega^2 \tilde{\xi}_y = -kg \tilde{\xi}_y$ . Иначе говоря, дисперсионное уравнение для частоты  $\omega$  имеет вид

$$\omega^2 = -kg \quad (2.195)$$

и дает мнимые собственные значения, соответствующие экспоненциально растущим во времени решениям.

Дисперсионное уравнение (2.195), если в нем изменить на противоположный знак в правой части, совпадает со знаменитым уравнением волн тяжести в океане — так называемых «гравитационных» волн. Это совпадение не случайно, ведь в задаче об устойчивости удержания плазмы магнитным полем мы, образно выражаясь, поставили жидкость (плазму) «с ног на голову», т. е. против силы тяжести. Этот пример неустойчивости равновесия плазмы исторически был исследован раньше всех прочих (неустойчивость Крускала—Шварцшильда). Теперь, двигаясь шаг за шагом от простых ко все более сложным видам равновесия, изучим, как изменяется их устойчивость.

Первым очевидным шагом на пути обобщения модели Крускала—Шварцшильда является допущение, что и в объеме (полупространстве), занимаемом плазмой, имеется магнитное поле (более слабое по условиям равновесия, чем снаружи). Из интуитивных

соображений сразу ясно, что само по себе оно не сможет сделать устойчивой конфигурацию, в которой тяжелая жидкость лежит сверху. Теперь сделаем еще один шаг: ограничим объем, занимаемый плазмой, в направлении вдоль  $H_0$  твердыми стенками, представляющими собой идеально проводящие пластины, установленные перпендикулярно к магнитному полю на расстоянии  $L$  друг от друга (рис. 2.33). Поля внутри и снаружи плазмы параллельны. Перпендикулярно к ним направлена сила  $F = \rho g$ . Поле внутри плазмы есть  $H_i$ , снаружи  $H_0$ . Дальнейшее рассмотрение проведем на уровне наглядных оценок.

Если граница плазмы смещается по вертикали на  $\delta z$ , причем возмущение имеет длину  $l \sim 2\pi/k$  поперек поля и, естественно,  $L$  вдоль, то давление на наиболее отклонившемся участке границы

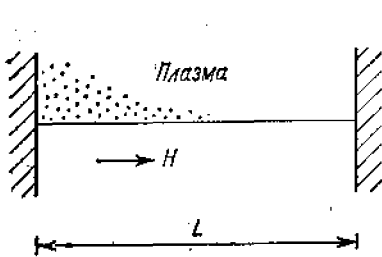


Рис. 2.33. Неустойчивость границы плазмы при наличии идеально проводящих торцов

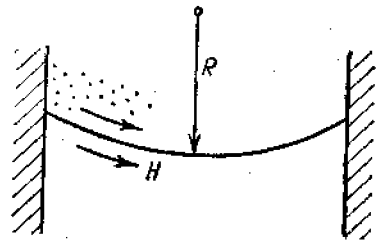


Рис. 2.34. Возникновение стабилизирующей силы натяжения при изгибании границы плазмы в магнитном поле

увеличится на массу столбика плазмы высотой  $\delta z$  (архимедова сила)

$$\delta p = \rho g \delta z. \quad (2.196)$$

Наиболее важный новый эффект, который связан с введением идеально проводящих торцов, — это искажение магнитного поля из-за «вмороженности» силовых линий (закрепления концов силовых линий). При этом нужно учитывать квазиупругую силу в результате искажения магнитного поля. Если эта сила больше изменения давления, то равновесие устойчиво.

При смещении плазмы поле внутри нее «вморожено» и силовая линия с «закрепленными» концами изгибается, рождая силу натяжения  $H_i^2/4\pi R$ , где  $R$  — радиус кривизны силовой линии. Так как  $R \sim L^2/2\delta z$  (рис. 2.34), то объемная квазиупругая сила равна  $H_i^2 \delta z / 2\pi L^2$ . При смещении плазмы магнитное поле снаружи остается параллельным границе, т. е. также изгибается:

$$\delta H_{\perp} \sim 2H_0 \delta z / L. \quad (2.197)$$

Итак, следует учесть дополнительное увеличение силы натяжения. В итоге получаем, что равновесие устойчиво, если

$$(H_i^2 + H_0^2) / 2\pi L^2 > g \rho k / 2\pi. \quad (2.198)$$

Поскольку существуют возмущения со сколь угодно малыми  $\lambda = 2\pi/k$ , то резкая граница плазмы всегда неустойчива даже при учете стабилизирующего влияния силы натяжения. Это наводит на мысль о том, что если граница плазмы (как в любом реальном случае) слегка размыта, то в формуле (2.198) нельзя рассматривать возмущения с длиной волны, меньшей толщины границы (скажем,  $\delta$ ), т. е. возмущения, удовлетворяющие условию  $k\delta > 1$ . Действительно, возникающая при смещении элемента неоднородной плазмы квазиупругая сила остается такой же, как и в предыдущей задаче:  $H^2\delta z/2\pi L^2$ , то архимедова сила  $g\delta\rho$  ( $\delta\rho$  — разность плотностей смещенного элемента и окружающей плазмы) изменится. Действительно,

$$\delta\rho = \delta z d\rho_0/dz, \quad (2.199)$$

так что условие устойчивости есть

$$H^2/2\pi L^2 > g d\rho_0/dz \sim g\rho/\delta, \quad (2.200)$$

т. е. размытая граница плазмы ширины  $\delta$  на самом деле может быть устойчива.

Постановка задачи с введением гипотетической силы тяжести  $g$  может показаться слишком искусственной. Однако в любом реальном равновесии плазмы в магнитном поле роль такой эффективной силы тяжести играет любая перпендикулярная к магнитному полю сила, действие которой не зависит от знака заряда. Такой силой может быть, во-первых, центробежная сила, связанная с движением частиц вдоль искривленной силовой линии.

Очевидно, при этом следует заменить  $g$  на  $\overline{v^2}_{\parallel}/R$ , где  $R$  — радиус кривизны силовой линии, а  $\overline{v^2}_{\parallel}$  — средний квадрат скорости продольного движения ионов (электронов). Во-вторых, эта сила может быть связана с дрейфом в неоднородном магнитном поле (см. § 2.1). Если эта неоднородность вызвана кривизной силовых линий, то замена производится следующим образом:  $g \rightarrow \overline{v^2}_{\perp}/2R$ . Складывая оба эффекта, получаем

$$g \rightarrow (1/R) (\overline{v^2}_{\parallel} + \overline{v^2}_{\perp}/2) \sim (1/R) (p_{\parallel} + p_{\perp})/\rho. \quad (2.201)$$

Отсюда видно, что выпуклая граница плазмы должна быть неустойчива. Для стабилизации силой натяжения силовых линий необходимо, как это видно из (2.200) и (2.201), чтобы

$$H^2 L > (4L^2\rho/\delta) (\overline{v^2}_{\parallel} + \overline{v^2}_{\perp}/2)/R, \quad (2.202)$$

где  $L$  — эффективная длина силовой линии;  $R$  — радиус ее кривизны;  $\delta$  — толщина размытой границы.

В заключение этого параграфа следует заметить, что если плазма движется ускоренно, то аналогом  $g$  является ускорение границы  $a$ . Инкремент нарастания возмущений в этом случае есть  $\text{Im } \omega \sim \sqrt{a/l}$ . Такого типа неустойчивости наблюдаются в экспери-

ментах по «инерциальному» методу удержания в термоядерном синтезе. Сюда относятся методы быстрого сжатия плазмы нарастающим аксиальным магнитным полем (так называемый «θ-пинч»), быстро сжимающаяся под действием мощного лазерного излучения капля плотной плазмы.

### § 2.12. Желобковая неустойчивость плазмы и энергетический принцип устойчивости в магнитной гидродинамике

Тенденцию плазмы обнаруживать неустойчивость вблизи выпуклых участков границы можно интерпретировать как следствие диамагнетизма плазмы. Будучи диамагнетиком, плазма стремится распространяться в сторону более слабого магнитного поля. Именно поэтому если поверхность плазмы лежит в области, где напряженность магнитного поля убывает от границы плазмы наружу, то положение границы может оказаться неустойчивым.

Для замкнутых магнитных ловушек справедлива следующая теорема. Нельзя создать такое магнитное поле, напряженность которого

возрастает наружу от границы плазмы вблизи каждой точки поверхности тороидальной плазменной конфигурации. Нормальная к поверхности плазмы компонента  $\text{grad}|H|$  меняет знак вдоль границы.

Простой иллюстрацией может служить система токамак. В этом случае  $H$  убывает от границы плазмы наружу на внешней стороне тороидального плазменного витка и возрастает на внутренней

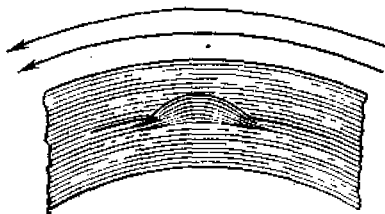


Рис. 2.35. Образование «языка» на поверхности плазмы

стороне витка. Указанное свойство замкнутых ловушек, естественно, вызывает сомнение в возможности устойчивого удержания плазмы в таких системах. Появляется следующий вопрос: не может ли плазма отдельными «языками» вытекать в область более слабого поля? Ответ на этот вопрос зависит от того, имеем ли мы дело с плазмой высокого давления, для которой параметр  $\beta = 8\pi r/H^2 \sim 1$ , или же с плазмой низкого давления, для которой  $\beta \ll 1$ . В этих двух крайних случаях условия устойчивости совершенно различны.

При  $\beta \sim 1$  на поверхности плазмы могут образовываться и развиваться локальные возмущения типа «языков» (рис. 2.35). Вследствие вмерзнутости поля в плазму образование отдельного языка приводит к искривлению силовых линий с увеличением магнитной энергии. Соответствующая работа производится расширяющейся плазмой благодаря ее тепловой энергии. Если «язык» встречает более слабое поле, то он будет распространяться все дальше, и это означает неустойчивость границы плазмы. В данном случае не-

устойчивость имеет локальный характер, т.е. она зависит от местной геометрии поля.

Как уже говорилось, в замкнутых ловушках на отдельных участках поверхности плазменного витка геометрия поля благоприятствует развитию «языков» (это имеет место там, где поверхность плазмы двояковыпуклая). Поэтому плазма с  $\beta \sim 1$  в таких системах должна быть более неустойчивой. Об этом не следует забывать при обсуждении перспектив использования высокотемпературной плазмы.

Совершенно иная ситуация складывается в том случае, если давление плазмы исчезающе мало по сравнению с магнитным давлением. Заметим, что это условие фактически соблюдалось во всех исследованиях, выполненных до сих пор на установках типа токамак. При  $\beta \ll 1$  возмущения плазмы не могут вызвать заметных искажений формы силовых линий. Следовательно, локальные деформации типа «языков» автоматически стабилизируются, и все возмущения внутри плазмы или на ее границе могут носить только характер перестановки целых систем трубок.

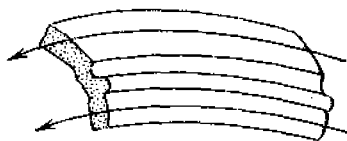


Рис. 2.36. Желобковая деформация

Плазма, заполняющая магнитную трубку, образованную очень тонким пучком силовых линий, стремится расширяться и поэтому будет перемещаться в ту сторону, где объем трубки увеличивается. Этот объем  $\delta V = \int \delta S dl$ , где  $\delta S$  — площадь поперечного сечения трубки и  $dl$  — элемент длины силовой линии. Вследствие неизменности магнитного потока  $\delta \Phi$  по длине трубки можно написать

$$\delta V = \int \delta S H dl / H = \int \delta \Phi dl / H = \delta \Phi \int dl / H. \quad (2.203)$$

Вмороженность силовых линий означает, что при всех перемещениях данной трубки, заполненной плазмой низкого давления,  $\delta \Phi$  остается постоянным. Следовательно, объем трубки изменяется пропорционально  $\int dl / H$ . Поскольку плазма, как и всякий другой газ, имеет естественную тенденцию к увеличению объема, то в процессе перемещения трубки  $\int dl / H$  играет роль, аналогичную потенциальной энергии.

Описанные здесь перемещения отдельных элементов плазмы, при которых силовые трубки меняются местами, замещая друг друга, называются перестановочными, или конвективными, деформациями. Появление таких деформаций на границе плазмы с внешним полем приводит к тому, что поверхность плазмы приобретает «желобковую» структуру (рис. 2.36), ориентированную вдоль силовых линий. Поэтому иногда говорят также о деформациях желобкового типа — самых опасных врагах равновесных конфигураций.

Критерий устойчивости по отношению к таким деформациям до-



пускает простую формулировку, если воспользоваться введенным выше понятием о «потенциальной энергии»  $U$ .

Граница плазмы устойчива в том случае, если при выходе магнитной трубки с плазмой изнутри на поверхность с образованием выступа происходит возрастание  $U$ , т. е. имеет место условие

$$\delta \int dl/H < 0. \quad (2.204)$$

Вариация интеграла берется между двумя бесконечно близкими силовыми линиями по нормали к границе плазмы. При другом знаке неравенство (2.204) означало бы неустойчивость границы плазменной конфигурации.

Полученный критерий устойчивости имеет достаточно ясный физический смысл. Для устойчивости необходимо и достаточно, чтобы напряженность поля, усредненная вдоль силовой линии, возрастала от границы плазмы наружу. Это частная форма известного принципа «минимума  $H$ ». Заметим, что согласно (2.203)  $\int dl/H = \delta V / \delta \Phi$ . Поэтому  $\int dl/H$  можно назвать «удельным объемом» магнитной трубки.

Для того чтобы установить область применимости критерия устойчивости (2.204), надо сначала устранить неопределенность в выражении для  $U$ , которая заключается в том, что не указаны

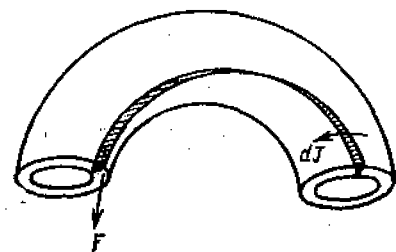


Рис. 2.37. Иллюстрация связи потенциальной энергии и поперечного тока

пределы интегрирования по длине силовой линии. Неопределенность исчезает в том случае, когда силовые линии на поверхности плазмы замкнуты, так как очевидно, что при этом интеграл  $\int dl/H$  должен распространяться на всю длину силовой линии. Для уточнения можно ввести следующее определение потенциальной энергии  $U$  магнитной поверхности с замкнутыми силовыми линиями:

$$U = -(1/N) \oint dl/H. \quad (2.205)$$

Здесь  $N$  — число обходов вдоль магнитной системы, после которых силовая линия замыкается на себя.

Потенциальная энергия  $U$  является однозначной характеристикой поверхности. Для того чтобы убедиться в этом, рассмотрим две близкие магнитные поверхности и определим ток, протекающий между ними через перегородку, проведенную вдоль одной из магнитных силовых линий (рис. 2-37). Суммарный ток  $dI$ , проходящий через перегородку, очевидно, не должен зависеть от выбора силовой линии:

$$dI = \oint j_{\perp} dn dl = \text{const}. \quad (2.206)$$

Здесь  $dn$  — элемент нормали к магнитной поверхности и  $j_{\perp}$  — компонента плотности тока, перпендикулярная к  $H$ . Интеграл берется

вдоль силовой линии. Согласно основному уравнению баланса сил в равновесии

$$j_{\perp} = (c/H) (dp/dn). \quad (2.207)$$

Из (2.206) и (2.207) следует, что

$$cdp \oint dl/H = \text{const.} \quad (2.208)$$

Таким образом, поверхность  $p = \text{const}$  должна совпадать с поверхностями, на которых эффективная «потенциальная энергия»  $U$  имеет одинаковое значение.

То обстоятельство, что разобранные неустойчивости равновесных конфигураций плазмы в магнитном поле оказалось возможным трактовать с помощью энергетических соображений, отражает важную особенность магнитогидродинамической теории устойчивости. На более рафинированном математическом языке магнитогидродинамической теории устойчивости можно сформулировать даже общий, так называемый энергетический принцип, заключающийся в следующем. Введем бесконечно малое смещение  $\xi(r, t)$  элемента объема плазмы из положения равновесия, при этом  $u = \partial \xi / \partial t$ . Оказывается, что линеаризованные уравнения общей теории устойчивости идеально проводящей плазмы можно привести к одному векторному уравнению

$$\partial^2 \xi / \partial t^2 = -\hat{K} \xi, \quad (2.209)$$

в котором  $\hat{K}$  — некоторый дифференциальный оператор, действующий на  $\xi$  как на функцию координат. Говоря формально, уравнение в виде (2.209) аналогично уравнению, описывающему колебания произвольной неоднородной упругой среды, где  $\hat{K}$  играет роль соответствующего обобщенного коэффициента упругости. Несмотря на кажущуюся громоздкость, вывод энергетического принципа не вызывает затруднений. Прежде всего в линеаризованных уравнениях магнитной гидродинамики следует перейти к переменной  $\xi$  (смещение) вместо  $u$  ( $= \partial \xi / \partial t$ ). Затем следует исключить возмущения всех остальных величин, выразив их через  $\xi$ .

Выберем в качестве основного уравнения (2.60). Левая часть этого уравнения после линеаризации примет вид  $\rho_0 \xi$ . Линеаризованную правую часть

$$-\nabla \delta p + (1/4\pi) [\text{rot } \delta \mathbf{H} \times \mathbf{H}_0] + (1/4\pi) [\text{rot } \mathbf{H}_0 \times \delta \mathbf{H}]$$

выразим через  $\xi$ . Так, первое слагаемое претерпевает следующие преобразования:  $\delta p = (dp/d\rho) \delta \rho$ , и с учетом уравнения непрерывности

$$-\delta \rho = \text{div } \rho_0 \xi = \rho_0 \text{ div } \xi + \xi \text{ grad } \rho_0.$$

Окончательно получим  $\delta p = -\gamma p \text{ div } \xi + \xi \text{ grad } p$ . Таким же образом с помощью уравнения можно выразить  $\delta \mathbf{H}$  через смещение  $\xi$ . В ре-

зультате уравнение, линеаризованное и выраженное через  $\xi$ , принимает вид

$$\rho \ddot{\xi} = \hat{F} \{ \xi \}, \quad (2.210)$$

где

$$\hat{F} \{ \xi \} = \nabla \{ \gamma p \operatorname{div} \xi + \xi \nabla p \} + \left\{ \frac{1}{c} [\mathbf{j} \times \operatorname{rot} \{ \xi \times \mathbf{H} \}] - \frac{1}{4\pi} [\mathbf{H} \times \operatorname{rot} \operatorname{rot} \{ \xi \times \mathbf{H} \}] \right\}. \quad (2.210a)$$

Здесь  $p$  — давление;  $\rho$  — плотность;  $\mathbf{H}$  — напряженность магнитного поля;  $\mathbf{j}$  — плотность тока (все величины в равновесии). Уравнение (2.210) математически полностью эквивалентно уравнениям, описывающим малые колебания упругой среды. Роль обобщенного коэффициента упругости принадлежит оператору  $K = \hat{F}/\rho$ . По аналогии с механикой упругих сред естественно ввести в рассмотрение потенциальную энергию малых колебаний  $\delta W = \frac{1}{2} \int \xi \hat{K} \xi dV$ .

Явное выражение для  $\delta W$  нетрудно получить с помощью (2.210a). Если  $\delta W > 0$  для всех  $\xi \neq 0$ , то отклонения от положения равновесия не могут нарастать во времени и, следовательно, плазма магнитогиродинамически устойчива. В противном случае, когда  $\delta W$  может принимать отрицательные значения, коэффициент упругости  $K$  отрицателен по отношению к некоторым деформациям, и, следовательно, рассматриваемая система неустойчива. Границу между устойчивыми и неустойчивыми конфигурациями образуют такие состояния, в которых исчезает упругость по отношению к одному определенному типу смещений. В этом случае наряду с исходным равновесным состоянием существуют близкие к нему равновесные состояния, соответствующие смещению  $\xi$  в направлении упругости, равной нулю. Таким образом, для нахождения границы устойчивости достаточно определить, при каких условиях появляются близкие равновесные состояния, т. е. достаточно исследовать уравнение  $F\xi = 0$ .

Равновесные состояния, для которых можно найти возмущения, соответствующие нулевым собственным частотам, по сути дела, представляют собой безразличные равновесия. Такова в кратких чертах общая программа магнитогиродинамической теории устойчивости. В выражении для потенциальной энергии  $\delta W$  два слагаемых [см. две фигурные скобки в формуле (2.210a)]. Первое описывает изменение внутренней тепловой энергии плазмы, второе — изменение магнитной энергии при перестройке конфигурации. Неустойчивости желобкового типа связаны с высвобождением внутренней энергии плазмы (при расширении). Они соответствуют деформациям равновесной конфигурации, имеющим вид желобков, вытянутых вдоль силовых линий магнитного поля. При таких смещениях силовые линии магнитного поля не «растягиваются» и не «изгибаются», на что пришлось бы затрачивать энергию [это второе слагаемое в (2.210a)].

Так как смещения в желобковых возмущениях поперечны силовым линиям магнитного поля ( $\xi \perp \mathbf{H}$ ), то можно сделать еще одно важное обобщение: энергетический принцип, формально выведенный из уравнений магнитной гидродинамики, имеет разумный смысл и для разреженной плазмы в дрейфовом приближении, так как для наиболее опасных возмущений ( $\xi \perp \mathbf{H}$ ) движение происходит поперек силовых линий, когда снова применима своеобразная гидродинамика, бесстолкновительная и с неизотропным давлением.

Не следует думать, что магнитная часть потенциальной энергии всегда играет стабилизирующую роль. Если при выборе равновесной конфигурации проявить беспечность, то именно высвобождение избытка энергии магнитного поля при перестройке конфигурации явится источником наиболее бурных проявлений магнитогидродинамической неустойчивости. Тенденция к сокращению длины силовых линий и приводит к неустойчивости. Примером может служить неустойчивость пинча. Иногда высвобождаемую при этом энергию называют энергией пинчевания.

### § 2.13. Стабилизация магнитогидродинамических неустойчивостей в термоядерных ловушках

Устойчивость плазмы при пинч-эффекте являлась предметом многочисленных исследований. Самые первые фотографии плазменного шнура, сжатого протекающим по нему собственным током, показали, что он неустойчив относительно деформаций типа перетяжек («шеек») и изгибов («змеек»).

Из общих соображений неустойчивость пинча с продольным током, текущим по поверхности, очевидна по той причине, что всюду от границы плазмы наружу магнитное поле падает.

Для стабилизации такого пинча еще в середине 50-х годов было предложено использовать сильное магнитное поле, направленное вдоль оси пинча. Действительно, в этом случае при деформациях пинча затрачивается работа на увеличение энергии этого магнитного поля, что и вызывает стабилизирующий эффект. Этот эффект резко всего проявляется для возмущений с большим волновым вектором, т. е. с малой длиной волны вдоль оси пинча. Напротив, в длинноволновых возмущениях изменения продольного магнитного поля малы, и относительно возмущений с длиной волны, значительно большей радиуса пинча, неустойчивость остается.

Условие устойчивости пинча относительно «змеек» и «шеек» можно получить наглядно следующим образом. Рассмотрим сначала змейкообразные возмущения пинча (рис. 2.38). Предположим, что внутри пинча радиуса  $a$  имеется замороженное продольное поле  $H_z$ , а снаружи — азимутальное поле тока, текущего по его поверхности,  $H$ . Если пинч изгибается (длина изгиба  $\lambda$ ), то силовые линии азимутального поля сгущаются с внутренней стороны и разрежаются снаружи. Поэтому на внутреннюю часть пинча (обращенную в сторону центра кривизны) действует большее магнитное

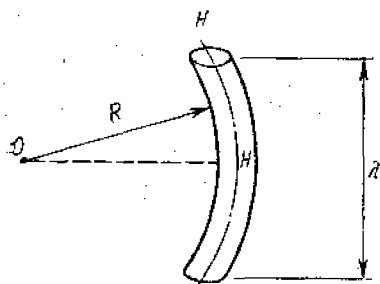


Рис. 2.38. Неустойчивость пинча относительно деформаций типа «змеек»

давление. Кроме того, из-за искривления силовых линий в замороженном продольном поле возникает сила натяжения, действующая в обратном направлении.

Силу, действующую со стороны азимутального поля на плазму, можно подсчитать следующим образом. Выделим вокруг пинча цилиндрический объем радиуса  $\lambda$ , как бы срезанный плоскостями, проходящими через центр кривизны. Так как силовые линии азимутального поля лежат в этих плоскостях, то полная сила, действующая на единицу длины пинча в направлении смещения, складывается из соответствующей составляющей магнитного давления на торцах:

$$2a \int_a^\lambda (H^2/8\pi) 2\pi r dr$$

(где угол наклона  $\alpha = \lambda/2R$ , а  $R$  — радиус кривизны) и давления на боковые поверхности, которым можно пренебречь. Вблизи от искривленного пинча поле  $H$  можно описывать так же, как и для бесконечно длинного проводника с током  $H = H_0 a/r$ .  $H_0 = H(a)$  — поле на поверхности пинча. Однако на расстояниях  $r \gg \lambda$  эффект возмущения исчезает и интеграл следует «обрезать» при  $r = \lambda$ . Поэтому действующая на единицу длины шнура сила, вызванная возмущением поля, при искривлении есть

$$(1/R) \int_0^\lambda (H^2/8\pi) 2\pi r dr = (H_0^2/4R) \ln(\lambda/a) a^2.$$

Сила натяжения, как обычно, равна

$$-(H_0^2/4\pi R) \pi a^2 = -(H_0^2/4R) a^2,$$

так что полная сила

$$\delta F = (a^2/4R) [H_0^2 \ln(\lambda/a) - H_0^2].$$

Отсюда возникает известное условие устойчивости

$$H_0^2/H_0^2 > \ln \lambda/a. \quad (2.211)$$

Так как из условия равновесия  $p + H_0^2/8\pi = H_0^2/8\pi$  следует, что  $H_0^2 < H_0^2$ , то ясно, что пинч нельзя полностью стабилизировать сильным внутренним продольным полем относительно длинноволновых возмущений.

Если продольное магнитное поле имеется и внутри, и вне шнура с аксиальным током, то полное поле оказывается винтовым. В таком поле шнур, искривившись по винтовой силовой линии, сможет пролезть между силовыми линиями поля, не искривляя их.

Такая неустойчивость имеет место, если возмущение поверхности шнура винтовое и если шаг этого винта  $\lambda$  совпадает с шагом силовой линии на поверхности пинча  $2\pi a (H_z/H_\varphi)$  или оказывается больше него. Следовательно, пинч устойчив относительно винтовых возмущений с длиной волны

$$\lambda < 2\pi a H_z/H_\varphi \quad (\text{критерий Крускала—Шафранова}). \quad (2.212)$$

Таким образом, в обоих случаях существует максимальная длина волны возмущения, еще стабилизируемого магнитным полем. Для системы типа токамак при возмущениях с длиной волны, равной периметру тора,  $\lambda=2\pi R$  критерий устойчивости Крускала—Шафранова имеет вид  $R < a H_z/H_\varphi$ , т. е. плазма тем более устойчива, чем больше безразмерный параметр  $q = (a/R) (H_z/H_\varphi)$  (так называемый запас устойчивости).

Условие устойчивости относительно деформаций типа «шеек» (см. рис. 2.27) можно найти следующим образом. Пусть радиус шнура изменился на  $\delta a$ . Тогда из-за сохранения магнитного потока поле внутри шнура меняется на  $\delta H = -H_i 2\delta a/a$ . Кроме того, азимутальное поле вне шнура  $H = 2I/ca$ , где  $I$  — полный ток, поэтому  $\delta H = -H_\varphi \delta a/a$ . Полное изменение разности магнитных давлений изнутри и снаружи пинча

$$\delta p_m = -(H_i^2/4\pi) (2\delta a/a) + (H^2/4\pi) (\delta a/a),$$

так что условие устойчивости имеет вид

$$H_i^2 > H^2/2. \quad (2.213)$$

Итак, достаточно сильное продольное поле подавляет «шейки», но не может стабилизировать пинч относительно длинноволновых «змеек». Дополнительные меры по стабилизации — окружение плазменного шнура проводящей коаксиальной оболочкой. При смещении шнура в оболочке должны наводиться индукционные токи, взаимодействие с которыми стремится вернуть шнур в исходное положение.

Сочетание этих способов стабилизации в свое время широко применялось для создания высокотемпературной плазмы.

Стабилизация по Крускалу—Шафранову представляет собой использование квазиупругой силы натяжения достаточно сильного магнитного поля. Критерии, которые были получены выше для идеализированной геометрии пинча с поверхностным током, конечно, нельзя применять для реальных равновесий в буквальном смысле. Ток всегда распределен каким-либо образом по сечению плазменного шнура. Поэтому внутри плазмы сосуществуют обе компоненты поля: и аксиальная, и азимутальная, т. е. суммарное магнитное поле является винтовым. В винтовом поле невозможна обычная перестановочная желобковая неустойчивость, так как из-за того, что шаг силовой линии на каждой магнитной поверхности различен, трубки «перепутываются» при радиальном смещении и

возникает та же самая квазиупругая сила натяжения. Чем сильнее меняется шаг витка силовой линии в равновесии при переходе от одной магнитной поверхности к другой, иначе говоря, чем сильнее перекрещенность силовых линий (так называемый шир), тем более устойчивым должно быть равновесие.

Наличие шира в магнитной системе с вращательным преобразованием поля означает, что угол поворота силовых линий  $\Omega$  является функцией от координаты  $r$ , т. е. изменяется при переходе от магнитной оси к периферии плазменного витка. В литературе по теории устойчивости в качестве меры шира чаще всего принимается величина

$$\theta_s = (r^2/L) d\Omega/dr, \quad (2.214)$$

где  $L$  — длина плазменного витка (для круговых систем  $L=2\pi R$ ). В настоящее время очень распространена точка зрения, согласно которой шир можно рассматривать как некоторое универсальное средство борьбы с широким классом плазменных неустойчивостей. Поэтому прежде чем специально останавливаться на выяснении роли шира в подавлении неустойчивостей магнитогидродинамического типа, сделаем отступление в сторону, чтобы разъяснить происхождение формулы (2.214).

Элементарное возмущение, возникшее в плазменном шнуре, можно представить в виде следующей функции координат:

$$\Psi \sim \exp[i(n\varphi - k_z z)],$$

где  $z$  — координата, отсчитываемая вдоль плазменного шнура;  $k_z$  — компонента волнового вектора в этом направлении;  $n$  — целое число. Для простоты здесь используется модель «выпрямленного» витка, что допустимо при слабой тороидальности системы ( $a \ll R$ ).

Рассмотрим, как это возмущение распространяется вдоль силовой линии. Обозначим элементарный отрезок длины силовой линии  $dl$ :

$$d/dl = (H_z/H) (\partial/\partial z) + (H_\varphi/Hr) (\partial/\partial \varphi); \quad H = \sqrt{H_z^2 + H_\varphi^2}.$$

Дифференцирование функции  $\Psi$  по  $l$  дает

$$d\Psi/dl = ik_{||} \Psi = (i/H) [(n/r) H_\varphi - k_z H_z] \Psi.$$

Здесь  $k_{||}$  — волновой вектор вдоль силовой линии. Возмущение постоянно вдоль силовой линии, т. е.  $k_{||} = 0$ , если

$$k_z = (n/r)(H_\varphi/H_z) = k_\varphi(H_\varphi/H_z). \quad (2.215)$$

В этом выражении  $k_\varphi = n/r$  — компонента волнового вектора по азимуту  $\varphi$ .

Вводя длину плазменного шнура  $L$ , можно записать условие (2.215) в следующей форме:  $k_z L = n\Omega$ . Поскольку  $k_z = 2\pi m/L$ , где  $m$  — целое число, то указанное условие удовлетворяется только для замкнутых силовых линий, у которых  $\Omega = 2\pi m/n$ .

Выясним, как будет изменяться фаза функции  $\Psi$  при переходе от силовой линии, лежащей на поверхности с радиусом  $r_0$ , для которой условие (2.215) выполнено, к бесконечно близкой силовой линии, лежащей на поверхности с радиусом  $r$  (как и ранее, будем рассматривать область лишь вблизи магнитной оси). Разлагая  $d\Psi/dl$  по малому параметру  $\delta r = r - r_0$ , находим

$$k_{\parallel} = \frac{H_z}{H} \left( \frac{n\Omega}{L} - k_z \right) = \frac{H_z}{H} \frac{d}{dr} \left( \frac{n\Omega}{L} \right) \delta r = \frac{H_z}{H} \frac{\delta r}{r} k_{\varphi} \theta_s, \quad (2.216)$$

где  $\theta_s$  определяется формулой (2.214). Для магнитных систем типа токамак в этом выражении можно положить  $H_z/H=1$ .

Из (2.216) следует, что при заданных значениях волнового вектора  $k_{\varphi}$  и относительного радиального смещения  $\delta r/r_0$  фаза возмущения на силовой линии, равная  $k_{\parallel} l$ , будет тем ближе к постоянной величине, чем меньше величина шира  $\theta_s$ . Смысл этого результата нетрудно уяснить. Если речь идет о магнитогидродинамических возмущениях в плазме низкого давления, то сохранение постоянства фазы при переходе от одной силовой линии к другой означает наименьшее возмущение магнитного поля. Следовательно, при значениях  $\theta_s$ , очень близких к нулю в системе без магнитной ямы, возмущения перестановочного типа могут свободно распространяться по радиусу, вызывая неустойчивость плазмы.

При увеличении  $\theta_s$  такие деформации будут стабилизироваться, так как с перемещением плазмы в направлении  $r$  в этом случае будет связано сильное искажение поля. Если  $\theta_s \neq 0$ , то возмущение, которое на некоторой магнитной поверхности имело форму выступа, совпадающего с силовой линией, должно при переходе к близкой магнитной поверхности изогнуться так, чтобы образовался плазменный «язык» сложной формы. Его боковые края как бы закреплены вдоль внутренней силовой линии, а наиболее далеко продвинувшийся по  $r$  гребень расположен параллельно внешней силовой линии (рис. 2.39). Дополнительную магнитную энергию, которая соответствует такому искажению формы поля (напомним, что силовые линии заморожены в плазму), можно получить только в результате работы сил давления плазмы. Условие стабилизации заключается в том, что накладывается ограничение на максимальную величину  $\beta$  или на величину градиента давления плазмы.

Проведем упрощенную оценку конкуренции двух сил, действующих на смещенный элемент плазмы. Дестабилизирующая сила  $p/R_s$  связана с кривизной силовой линии магнитного поля, где  $R_s$  — радиус кривизны для прямолинейного плазменного столба,

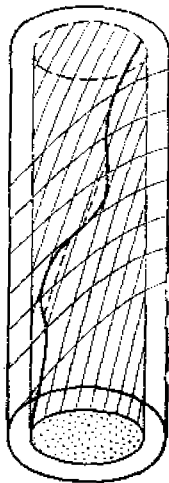


Рис. 2.39. Желобковая деформация при наличии шира



$R_s = rH^2/H_\varphi^2$ . Возмущение давления при смещении  $\xi$  равно  $\delta p \sim \xi dp/dr$ .

Итак, сила, стремящаяся вывести плазму из равновесия,  $F_1 = -(1/R_s)(dp/dr)\xi$ .

Стабилизирующую силу натяжения  $(H\varphi)H/4\pi$  можно оценить следующим образом:  $F_2 \sim H_0 k_{\parallel} \delta H_{\perp}/4\pi$ , где  $k_{\parallel}$  определяется выражением (2.216);  $\delta H_{\perp}$  можно найти, рассматривая искривление силовой линии при выпячивании «языка» на расстояние  $\xi$ :  $\delta H_{\perp} \sim H_0 \xi k_{\parallel}$ .

Минимальный характерный размер  $\delta r$ , занимаемый областью, в которой происходит возмущение, естественно считать имеющим тот же порядок величины, что и длина волны возмущения по азимуту (по  $\varphi$ ), т. е.  $k_{\varphi} \delta r \sim 1$ . В итоге из условия  $F_2 > F_1$  получаем известный критерий Сайдэма стабилизации локальных возмущений широм:

$$-(8\pi/H_z^2) dp/dr < K (H^2/H_\varphi^2) (1/r) \theta_s^2. \quad (2.217)$$

Специально введенный здесь численный множитель  $K \sim 1$  подчеркивает, что использованная оценка не может претендовать на большую точность. Правильное значение должна дать строгая теория.

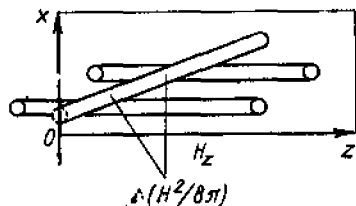


Рис. 2.40. Стабилизация желобковой неустойчивости с помощью шира

Количественный вывод критерия Сайдэма представляется весьма поучительным. Мы ограничимся минимальными математическими выкладками, предельно упростив задачу, но стараясь сохранить основные черты стабилизации желобковой неустойчивости с помощью шира. Выберем плоскую геометрию, напоминающую уже рассмотренную ранее в задаче Крускала — Шварцшильда об устойчивости размытого (без резкой границы) равновесия плазмы под действием силы тяжести, уравновешиваемой давлением магнитного поля.

В эту задачу необходимо ввести шир, т. е. поворот силовых линий равновесного магнитного поля. На рис. 2.40 изображено именно такое равновесие. С ростом  $x$ , по мере продвижения в глубь плазмы, магнитное поле, при  $x=0$  для определенности направленное строго по оси  $z$  (перпендикулярно к плоскости рисунка), приобретает компоненту по оси  $y$ . Будем считать, что вблизи плоскости  $x=0$  эта компонента магнитного поля ведет себя как  $H_y = Hx/L_s$ . Для установления соответствия между плоской задачей и цилиндрической геометрией, для которой дано определение шира  $\theta_s$ , заметим, что  $H_y$  соответствует  $H_\varphi$ .

Приращение  $H_\varphi$  за счет изменения угла поворота  $d\Omega/dr$  имеет вид  $dH_\varphi = (r/L)(d\Omega/dr)Hdr$ . Сравнивая его с приращением  $H_y$  при изменении  $x$ , получаем  $\theta_s/r \rightarrow 1/L_s$ .

Нетрудно видеть, что возмущение такого равновесия, выбранное, как и в старой задаче Крускала—Шварцшильда, в виде  $\exp\{-i\omega t + ik y\}$ , имеет при  $x \neq 0$  компоненту волнового вектора вдоль силовой линии  $k_{||} = k\theta x$ . По этой причине и возникает стабилизирующая сила натяжения силовых линий, учтенная ранее в упрощенном рассмотрении. Однако строгое рассмотрение должно учитывать также и возмущение магнитного давления

$$\delta(H_z^2 + H_y^2) / 8\pi \approx (H_z \delta H_z + H_y \delta H_y) / 4\pi. \quad (2.218)$$

При дальнейшем анализе воспользуемся методом отыскания границы устойчивости, основанным на поиске решения, соответствующего условию  $\omega^2 = 0$ , т. е. случаю нулевой упругости (см. § 2.12). Компонента уравнения Эйлера по оси  $y$  превращается в простое условие баланса сил  $ik\delta H_z H_z = H'_y \delta H_x$  (газокинетическое давление плазмы считаем пренебрежимо малым, как и в большинстве задач о желобковой неустойчивости плазмы). С помощью этого уравнения возмущение магнитного давления можно переписать в следующем виде:

$$H_y \delta H_y / 4\pi - i H'_y \delta H_x / 4\pi k.$$

Основная компонента уравнения Эйлера — по оси  $x$  (в направлении действия силы тяжести) — теперь принимает вид

$$\frac{i(kH_y)\delta H_x}{4\pi} - \delta\rho g - \frac{(H_y \delta H_y)'}{4\pi} + \frac{i(H'_y \delta H_x)'}{4\pi k} = 0. \quad (2.219)$$

Воспользуемся еще уравнениями

$$\delta H_x = ik H_y \xi_x; \quad (2.220)$$

$$\delta\rho = \rho' \xi_x; \quad (2.221)$$

$$\delta H'_x + ik \delta H_y = 0, \quad (2.222)$$

полученными из условия вмерзновенности магнитного поля  $\partial \mathbf{H} / \partial t = = \text{rot}[\mathbf{u} \times \mathbf{H}]$ , уравнения непрерывности и условия  $\text{div } \mathbf{H} = 0$  соответственно. Исключая все переменные, кроме  $\delta H_x$ , нетрудно получить одно уравнение для возмущения магнитного поля:

$$\delta H''_x - k^2 \delta H_x - (4\pi \rho' g / H_y^2) \delta H_x = 0. \quad (2.223)$$

Теперь видно, в чем заключался дефект простого вывода, основанного на балансе сил: не был учтен член со второй производной (обязанный своим происхождением возмущенному давлению магнитного поля).

Обращает на себя внимание изящная аналогия между исследуемым уравнением и уравнением Шредингера с потенциальной ямой  $1/x^2$  для известной задачи нерелятивистской квантовой механики о «падении» частицы на притягивающий центр. Не удивительно, что ход рассуждений, который будет сейчас проведен, очень напоминает рассуждения, содержащиеся практически в любом курсе квантовой механики.

В окрестности сингулярности  $x=0$  (именно в этой точке  $k_{||}=0$ ) будем искать решение уравнения (2.223) в виде  $x^n$ , пренебрегая членом  $k^2 \delta H_x$ . Подставляя искомое решение в усеченное уравнение

$$\delta H''_x - \frac{4\pi r' g}{H^2_y} \delta H_x = 0, \quad (2.224)$$

получаем выражение для показателя  $n = 1/2 \pm \sqrt{1/4 + \alpha}$ , где  $\alpha = 4\pi r' g L^2_s / H^2$ . Нетрудно увидеть, что характер решения меняется при условии  $\alpha < -1/4$ . В этом случае решение можно представить в виде  $\sim x = \exp(i\nu \ln x)$ , где  $\nu = \sqrt{|\alpha| - 1/4}$ . Это значит, что вблизи  $x=0$  решение имеет бесконечно много нулей. Поэтому решения, затухающие на бесконечности, можно считать с любым решением вблизи  $x=0$ .

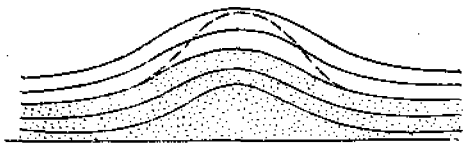


Рис. 2.41. Баллонная мода неустойчивости

численный коэффициент нужно принять равным  $1/4$ . Отметим, кстати, что в упомянутой квантовомеханической задаче о «падении» на центр условием захвата частицы потенциальной ямой также является  $\alpha \leq -1/4$ .

У неустойчивости сайдэмовского типа есть аналог и для равновесных систем совсем другого вида, в частности не имеющих «шира», но обладающих свойствами магнитной потенциальной ямы «в среднем», как говорят, имеющих «средний минимум  $H$ ». Примером может служить магнитная ловушка, магнитное поле которой обладает минимумом  $\int dl/H$ .

Однако, как уже говорилось, трудно добиться, чтобы магнитное поле возрастало наружу во всех направлениях. Поэтому на локальных участках поверхности, где магнитное поле убывает в сторону от плазмы, возможно возникновение локальных деформаций — так называемых «баллонных» мод (рис. 2.41). Эта неустойчивость, как и мода Сайдэма, вызывается конечной величиной  $\beta$  и стабилизируется, если сила натяжения силовых линий достаточно велика.

Как уже говорилось, кроме неустойчивостей, причиной которых является стремление плазмы к расширению в направлении, перпендикулярном к магнитному полю, может существовать особый тип неустойчивости, свойственный самой магнитной конфигурации. Эта неустойчивость обусловлена тем, что вдоль силовых линий винтового магнитного поля действуют максвелловские натяжения (неустойчивость пинчевания). Силовые линии стремятся сократиться путем деформации, при которой они выпрямляются, а плазменный шнур винтообразно извивается. Если малые винтовые дефор-

мации описываются обычным выражением  $\psi \sim \exp[i(n\varphi - kz)]$ , то  $n$  называется номером моды. При  $n=1$  возмущения соответствуют простому однозаходному винту, при  $n=2$  — двухзаходному и т. д. Стабильность плазменного витка по отношению к винтовым деформациям зависит от коэффициента запаса  $q$ .

Согласно критерию Крускала — Шафранова при  $q > 1$  стабилизируется наиболее опасная первая мода винтовой деформации. Если  $q > n$ , то обеспечена устойчивость по отношению ко всем винтовым модам вплоть до  $n$ -й. Детальный анализ показывает, что при очень больших  $q$  (четыре и более) должны быть стабилизированы все винтовые возмущения. Именно поэтому величина  $q$  и была названа коэффициентом запаса по винтовой неустойчивости.

Подведем итог описанию магнитогидродинамической неустойчивости идеальной плазмы с вмороженными силовыми линиями. Все три рассмотренных выше типа возмущений: желобковые или перестановочные деформации, баллонная мода и винтовое извивание плазменного шнура с продольным током — при невыполнении условий устойчивости развиваются очень быстро и практически полностью уничтожают эффект магнитной термоизоляции. Инкремент нарастания для перестановочных возмущений порядка  $v_i/a$  (где  $v_i$  — тепловая скорость ионов), а для винтовых возмущений порядка  $v_A/a$ , т. е. неустойчивость развивается, как говорят, за «инерционные» времена.

Всякая попытка нагревать магнитогидродинамически неустойчивую плазму представляется совершенно бесполезным делом. Однако, как мы видели, все указанные виды неустойчивости в плазме низкого давления сравнительно легко подавляются при использовании магнитных систем с большим отношением  $H_z/H_\varphi$ , удовлетворяющих условию минимума  $B$  или же обладающих широм.

## § 2.14. Магнитогидродинамическая неустойчивость равновесия при конечной электропроводности

До сих пор, говоря о магнитогидродинамической картине устойчивости плазмы, мы исходили из представления об идеальной вмороженности магнитного поля в плазму. Реальная плазма из-за наличия сил трения между электронами и ионами обладает конечной электропроводностью. Во многих случаях, когда идеальная бесконечно проводящая плазма оказывается устойчивой, добавление даже небольшого электрического сопротивления «размораживает» силовые линии, и они перестают увлекаться плазмой. В результате может появиться новый класс так называемых диссипативных неустойчивостей, как правило, имеющих характер более медленного тихого просачивания плазмы в магнитном поле. Это просачивание тем медленнее, чем меньше электрическое сопротивление. Среди неустойчивостей, связанных с конечной проводимостью плазмы, условно выделим следующие виды: «гравитационную» и токово-конвективную, или «штопорную», неустойчивость. Эти типы неустой-

чивостей свойственны самой плазме, т. е. источником энергии для них является тепловое расширение плазмы, как и в случае желобковой неустойчивости плазмы. При развитии этих неустойчивостей плазма практически не возмущает магнитного поля, образующего как бы жесткий каркас из неподвижных силовых линий. При этом, очевидно, электрическое поле должно быть потенциальным (безвихревым), т. е.  $\mathbf{E} = -\nabla\phi$ . Наибольшим сходством с обычной желобковой неустойчивостью идеально проводящей плазмы обладает «гравитационная» неустойчивость. Различие между этими двумя явлениями заключается в том, что если магнитное поле заморожено в плазму, то энергетически выгоднее развиваться только деформациям, ориентированным строго вдоль силовых линий, в то время как при конечной проводимости плазмы появляется возможность распространения косых возмущений с волновым вектором  $k_z$ , не

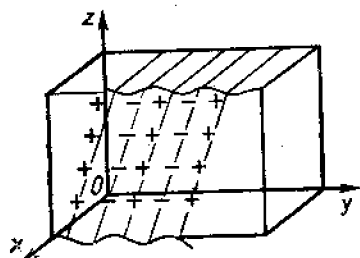


Рис. 2.42. Схематическое изображение развития деформаций при «гравитационной» неустойчивости

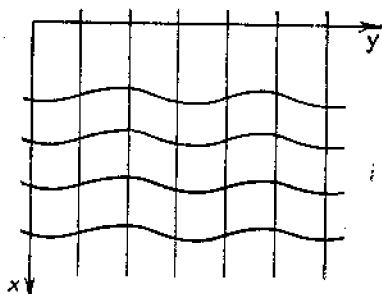


Рис. 2.43. Изолинии плотности плазмы при возникновении гравитационной неустойчивости

равным нулю. В обоих случаях неустойчивость существует тогда, когда напряженность магнитного поля убывает в сторону уменьшения плотности плазмы. Она вызывается диамагнитным эффектом; плазма выталкивается в сторону более слабого магнитного поля. Однако для упрощения математического анализа развития неустойчивости оказывается удобным заменить диамагнитный эффект, обусловленный неоднородностью поля, действием (в том же направлении) некоторой постоянной силы, а магнитное поле считать однородным. В качестве такой силы в упрощенной модели процесса удобно снова выбрать силу тяжести. Отсюда и происходит термин «гравитационная» неустойчивость. В окончательных формулах нетрудно перейти от силы тяжести к реальному диамагнитному эффекту.

Для того чтобы разобрать механизм возникновения и развития косых деформаций в плазме с конечной проводимостью, воспользуемся следующей моделью. Плоский слой плазмы с концентрацией  $n(x)$ , убывающей вдоль оси  $x$ , находится в сильном магнитном поле  $B$ , параллельном оси  $z$  (рис. 2.40). Сила тяжести, моделиру-

ющая влияние неоднородности магнитного поля, направлена по оси  $x$ . Допустим, что в плазме возникает флуктуация плотности вида  $n_1 \sim \exp(-i\omega t + ik_y y + ik_z z)$ . В результате такого возмущения изолинии плотности плазмы в каждом горизонтальном сечении приобретают волнистую форму (рис. 2.43). Это означает, что флуктуации плотности указанного вида представляют собой малый сдвиг косых слоев плазмы вдоль оси  $x$ .

Вследствие существования силы тяжести, перпендикулярной к  $\mathbf{H}$ , должно происходить дрейфовое движение частиц, скорость которого направлена по оси  $y$  и имеет разный знак для ионов и электронов. В однородной плазме такое движение не может создать разделение зарядов. Однако, если возникают возмущения плотности, зависящие от координаты  $y$ , потоки заряженных частиц из соседних объемов плазмы не компенсируют друг друга, и поэтому происходит электрическая поляризация косых слоев с образованием объемных зарядов (см. рис. 2.42). В идеально проводящей плазме  $k_z \neq 0$  заряды должны были бы компенсироваться в результате перетекания вдоль силовых линий, поэтому косые деформации не могли бы развиваться. Однако при конечной проводимости плазмы полная компенсация не происходит, и из-за возникновения электрического поля начальное возмущение должно возрастать. В этом легко убедиться из рис. 2.42. В результате дрейфового движения на левой стороне каждого выступа (т. е. косого слоя, смещенного вперед) появляется положительный заряд, а на правой стороне — отрицательный. Величина этих зарядов зависит от скорости, с которой они отводятся током вдоль силовых линий. Электрическое поле, создаваемое зарядами в плазме, вызывает дрейф в направлении  $[\mathbf{E} \times \mathbf{H}]$ . Этот дрейф направлен таким образом, что выступы в распределении плотности смещаются в направлении положительной оси  $x$ , т. е. вперед, а впадины — в противоположном направлении. Это означает раскачку колебаний плотности, т. е. развитие неустойчивости.

Рассмотрим количественную сторону указанного механизма. Линеаризованное уравнение движения имеет вид

$$-i\omega n_0 m_i u + \nabla p_1 = (1/c) [\mathbf{j}_1 \times \mathbf{H}] + m_i n_1 \mathbf{g}. \quad (2.225)$$

В плазме с достаточно хорошей проводимостью косые возмущения должны нарастать медленно, поэтому инерционный член в уравнении (2.225) при  $k_z \neq 0$  относительно мал. Проектируя это векторное уравнение на оси  $x$  и  $y$ , находим следующие соотношения между компонентами тока и градиента давления:

$$\frac{1}{c} j_{1y} H + m_i g n_1 = \partial p_1 / \partial x, \quad (2.226)$$

$$-(1/c) j_{1x} H = \partial p_1 / \partial y. \quad (2.226a)$$

Из условия квазинейтральности в рассматриваемом процессе получаем

$$\operatorname{div} \mathbf{j}_1 = \operatorname{div} \mathbf{j}_\perp + ik_z j_{1z} = 0. \quad (2.227)$$

Из (2.226) и (2.226а) следует, что

$$\operatorname{div} \mathbf{j}_{\perp} = -ik_y m_i c g n_i / H. \quad (2.228)$$

Подставляя это выражение в (2.227), находим

$$j_{iz} = (m_i c g / H) (n_i k_y / k_z). \quad (2.229)$$

Уравнение непрерывности имеет вид

$$-i\omega n_i + n_i \operatorname{div} \mathbf{u}_{\perp} + i n_i k_z u_z + \mathbf{u} \nabla n_i = 0. \quad (2.230)$$

Поперечная скорость движения плазмы удовлетворяет условию  $\operatorname{div} \mathbf{u}_{\perp} = 0$ . Действительно,

$$\mathbf{u}_{\perp} = - (c/H^2) [\nabla \varphi_i \times \mathbf{H}] + (m_i c / e H^2) [\mathbf{g} \times \mathbf{H}],$$

где  $\varphi_i$  — электрический потенциал, связанный с возмущением в плазме. Следовательно,

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} = -\frac{c}{H^2} \left( \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial y \partial x} \right) = 0. \quad (2.231)$$

Таким образом, второй член в выражении (2.230) исключается.

Продольным движением ионов также можно пренебречь, поскольку оно представлено в (2.230) членом, содержащим множитель  $n_i k_z$ , который мал по сравнению с  $\nabla n_i$ . С учетом этих замечаний уравнение непрерывности (2.230) можно записать в следующей форме:

$$-i\omega n_i - (c/H) ik_y \varphi_i (dn_i/dx) = 0. \quad (2.232)$$

Далее из закона Ома находим

$$j_{iz} = ik_z \sigma \varphi_i, \quad (2.233)$$

где  $\sigma$  — электропроводность плазмы. Последнее соотношение справедливо в том случае, если продольный ток в невозмущенной плазме отсутствует.

Решая систему уравнений (2.229), (2.232) и (2.233), получаем следующее выражение для инкремента нарастания малых возмущений:

$$\gamma = -i\omega = \omega_g^2 / \omega_s, \quad (2.234)$$

где

$$\omega_g^2 = -g(1/n_i) (dn_i/dx); \quad \omega_s = (k_z^2 / k_y^2) \omega_{Hi} \omega_{He} \tau_{ei}. \quad (2.234a)$$

Согласно (2.234) инкремент растет с уменьшением  $k_z$ . При очень малых  $k_z$ , когда  $\omega_s$  становится порядка  $\omega_g$ , в уравнении (2.230) следует сохранить поперечный инерционный член. Это означает, что исследуемая неустойчивость переходит в желобковую с инкрементом  $\gamma = \omega_g$ . Таким образом, «гравитационная» диссипативная неустойчивость является продолжением желобковой для случая с конечной проводимостью.

\* В плазме могут развиваться только косые возмущения, очень сильно вытянутые вдоль силовых линий, для которых  $k_z$  относительно невелико.

Для того чтобы перейти к реальному случаю плазмы, находящейся в неоднородном магнитном поле, нужно заменить фиктивную силу  $\rho g$  истинной силой диамагнитного выталкивания.

Если  $R$  — радиус кривизны силовой линии неоднородного магнитного поля, то замену можно провести по уже известному рецепту:

$$g = (1/R) (2p/\rho). \quad (2.235)$$

Очевидно, что в системах, удовлетворяющих условию «минимум  $H$ », «гравитационная» неустойчивость подавляется так же, как и желобковая. Однако косые деформации с не слишком малым отношением  $k_z/k_y$  нельзя стабилизировать при помощи шира. Поэтому в ловушках без магнитной ямы «гравитационная» неустойчивость может приводить к аномальной утечке частиц из плазмы. Вследствие диссипативного характера «гравитационной» неустойчивости она тем менее опасна, чем выше температура плазмы.

Если в равновесном состоянии по плазме вдоль магнитного поля течет ток и при этом существует градиент температуры в направлении, перпендикулярном к  $\mathbf{H}$ , то может возникать так называемая токово-конвективная неустойчивость. С ней также связана раскачка косых деформаций в плазме, но при этом, в противоположность «гравитационной» неустойчивости, главную роль играют не возмущения плотности, а возмущения температуры и электропроводности.

Пусть в плазме с начальной температурой  $T_0(x)$ , которая изменяется вдоль оси  $x$ , происходит флуктуация температуры, причем  $T_1 = T - T_0$  зависит от координат и времени по закону  $\exp(-i\omega t + ik_y y + ik_z z)$ . Поскольку проводимость есть функция температуры плазмы, то возникают также возмущения проводимости  $\sigma_1 = (d\sigma/dT) T_1$ . Из-за наличия продольного тока возмущения должны приводить к электрической поляризации косых слоев, которая будет носить такой же характер, как и в случае, когда на плазму действует сила тяжести.

Выясним условия раскачки малых возмущений. Из закона Ома для продольной составляющей тока следует, что

$$j_{1z} = \sigma_1 E_0 + \sigma_0 E_1, \quad (2.236)$$

где  $E_0$  — начальная напряженность электрического поля в плазме;  $E_1$  — возмущение поля. Из уравнений непрерывности для ионов и электронов получаем

$$\frac{\partial n_i}{\partial t} + \operatorname{div} n_i \mathbf{v}_i = \frac{\partial n_i}{\partial t} + \frac{c E_{1y}}{H} \frac{\partial n_0}{\partial x} + n_0 i k_z v_{1zt} = 0; \quad (2.237)$$

$$\frac{\partial n_e}{\partial t} + \operatorname{div} n_e \mathbf{v}_e = \frac{\partial n_e}{\partial t} + \frac{c E_{1y}}{H} \frac{\partial n_0}{\partial x} + n_0 i k_z v_{1ze} = 0. \quad (2.238)$$

Время нарастания возмущений очень велико по сравнению со временем релаксации зарядов в плазме. Поэтому можно считать, что в рассматриваемом процессе квазинейтральность плазмы практи-



чески не нарушается. Вычитая выражение (2.237) из (2.238), получаем

$$v_{1z} - v_{1z0} = 0, \quad (2.239)$$

что эквивалентно условию  $j_{1z} = 0$ . Добавим теперь уравнение теплового баланса. Учитывая, что в неравновесной плазме энергия переносится вместе с веществом в результате дрейфового движения, можно записать это уравнение в виде

$$-i\omega T_1 + (cE_{1y}/H) \partial T_0 / \partial x = -\chi_{\parallel} k_z^2 T_1. \quad (2.240)$$

Здесь  $\chi_{\parallel}$  — продольная теплопроводность плазмы. Поскольку электрическое поле потенциально, то  $E_{1y}/E_{1z} = k_y/k_z$ . Из (2.236), (2.240) и условия  $j_{1z} = 0$  легко получить дисперсионное уравнение токово-конвективной неустойчивости:

$$-i\omega = \gamma = -\chi_{\parallel} k_z^2 + (cE_0/H) (k_y/k_z) (1/\sigma_0) d\sigma_0/dx. \quad (2.241)$$

В плазме с невысокой электронной температурой теплопроводность мала, и первым членом в (2.241) можно пренебречь. В таком случае косые деформации, для которых знак  $k_y/k_z$  совпадает со знаком  $d\sigma_0/dx$ , будут нарастать, т. е. должна иметь место токово-конвективная неустойчивость.

Однако в высокотемпературной плазме продольная теплопроводность при не слишком малых значениях  $k_z$  быстро выравнивает возмущения температуры. Инкремент нарастания возмущений  $\gamma$  может достигать больших положительных значений только при  $k_z \rightarrow 0$ . В тороидальной геометрии роль  $k_z$  выполняет компонента волнового вектора  $k_{\parallel}$ . Как было выяснено в предыдущем параграфе, при наличии шира величина  $k_{\parallel}$  может быть очень мала только вблизи магнитной поверхности с замкнутыми силовыми линиями. Она быстро увеличивается при смещении от такой поверхности в радиальном направлении. Это означает, что шир подавляет токово-конвективную неустойчивость. Расчеты показывают, что роль токово-конвективной неустойчивости в энергетическом балансе высокотемпературной плазмы относительно невелика и уменьшается с ростом  $T$ .

Следует отметить, что модификация неустойчивости такого типа часто наблюдается в низкотемпературных газовых разрядах во внешнем магнитном поле. Она также имеет свой аналог в электронно-дырочной плазме твердого тела.

### § 2.15. Неустойчивость тиринг-моды

Значительно более сложной является неустойчивость плазмы с конечной электропроводностью, при которой происходит «разрыв» силовых линий магнитного поля. Эта разновидность неустойчивости получила название «разрывной», или тиринг-моды (от английского слова *tearing* — «разрыв»).

В известном смысле ее можно представить себе как некоторое расширение области винтовой неустойчивости для магнитных систем с продольным током. В области устойчивости идеально проводящей плазмы, определяемой условием Крускала — Шафранова, в плазме с конечной проводимостью появляются области возможного развития медленной неустойчивости, изменяющей структуру винтового магнитного поля из-за локального пинчевания. При этом в шнура вблизи замкнутых силовых линий происходит расщепление магнитных поверхностей и выделяются винтовые волны — локальные пинчи.

Эта мода неустойчивости играет важную роль в токамаке. Считают, что релаксационные колебания, наблюдаемые в токамаке в некоторых режимах, связаны с тем, что внутри плазменного шнура из-за тиринг-неустойчивости время от времени происходит перестройка магнитной конфигурации, при которой избыток энергии магнитного поля передается плазме. Неустойчивость такого типа может оказаться важной также в астрофизике и геофизике.

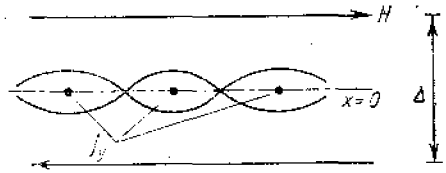


Рис. 2.44. Тиринг-неустойчивость нейтрального слоя

Математические методы исследования тиринг-моды весьма нетривиальны. Это свя-

зано с тем, что малое электрическое сопротивление в линеаризованных уравнениях для возмущений входит в малый коэффициент перед старшей производной. Это как раз та самая ситуация, в которой математика призывает к особой бдительности. В некотором смысле теория гидродинамической устойчивости успела «набить себе шишки» в классической задаче об устойчивости течения Пуазейля по трубе, прежде чем В. Гейзенберг и С. Лин сумели «укротить» известное уравнение Зоммерфельда — Орра, в котором вязкость примерно таким же образом входила в малый коэффициент при старшей производной.

Физический смысл возникших для тиринг-моды математических осложнений можно разъяснить следующим образом. В некотором очень узком слое из-за конечной проводимости плазмы происходит в буквальном смысле «разрыв» магнитных силовых линий. Не случайно эта неустойчивость иногда называется «разрывной». При этом разорванные «концы» силовых линий соединяются заново (как говорят, происходит «пересоединение»), но, образно выражаясь, с другими партнерами. Не удивительно, что такая кардинальная перестройка топологии магнитного поля требует адекватного сложного математического описания.

Рассмотрим плоскую модель тиринг-неустойчивости, появляющейся в задаче о возмущении равновесия плазмы в так называемом нейтральном слое. Пусть давление плазмы достигает максимума

мума в плоскости  $x=0$ , магнитное поле, направленное по оси  $z$ , равно нулю при  $x=0$  и нарастает при удалении в обе стороны от нейтральной плоскости с характерным масштабом изменения  $x \approx \approx \Delta$ . При этом направление магнитного поля в нижней полуплоскости обратно направлению его в верхней (рис. 2.44). Такой скачок магнитного поля поддерживается током  $j_0$ , текущим вдоль оси  $y$ . Даже из простых интуитивных соображений ясно, что такое равновесие обладает большим избытком свободной энергии, заключенной в магнитном поле. Потенциально этот избыток энергии мог бы освободиться, если бы, условно говоря, произошла «аннигиляция» встречных магнитных полей. Физическим механизмом такой аннигиляции могло бы быть пинчевание, разбиение первоначально плоского токового слоя на отдельные жгуты (см. рис. 2.44).

При таком пинчевании возмущение выбирается в виде  $\exp(-i\omega t + ik_z x)$ . Нужно учитывать возмущения скорости и магнитного поля  $u_x, u_z, H_x, H_z$ . Электрическое поле возмущения направлено по оси  $y$ . Уравнение Эйлера дает

$$-i\omega \rho u_x = -(dp/dx) + (1/4\pi c) j_y H_0 + (1/4\pi c) j H_z; \quad (2.242)$$

$$-i\omega \rho u_z = -ikp - (1/4\pi c) j H_x. \quad (2.243)$$

Воспользовавшись условием несжимаемости  $iku_x + du_x/dx = 0$  (как будет видно, при этом возникнут очень медленные движения), уравнения (2.242) и (2.243) после несложных алгебраических преобразований можно привести к уравнению для  $u_x$ .

$$-i\omega \rho u_x = (1/4\pi c) j_y H_0 + (i/4\pi c k) j'_0 H_x - (i\omega/k^2) \rho u''_x. \quad (2.244)$$

В этом уравнении потенциальным источником неустойчивости является член  $(i/4\pi c k) j'_0 H_x$ . С помощью условия вмороженности его можно привести к виду  $-(1/4\pi c) j'_0 H_0 \xi_x$ . Он дает отрицательный вклад в упругость:  $j'_0 H_0 \geq 0$  (рис. 2.45). С точки зрения энергетического принципа он соответствует третьему слагаемому (энергии пинчевания) в выражении (2.210а).

Однако столь легкая доступность этого энергетического резервуара является иллюзорной. Возмущения, изображенные на

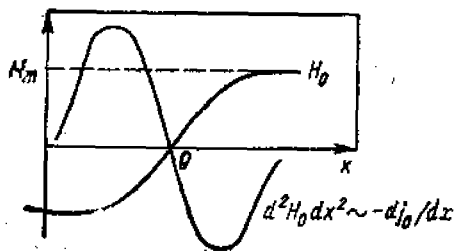


Рис. 2.45. Профиль магнитного поля и производной от плотности тока

рис. 2.44 и соответствующие неустойчивости типа локального пинчевания в окрестности плоскости  $x=0$ , молчаливо предполагают разрыв и пересоединение силовых линий магнитного поля. Но это невозможно, если плазму считать идеальным электрическим проводником. Основная идея теории тиринг-неустойчивости заключается в том, что в некоторой, очень малой окрестно-

сти нейтральной плоскости учитывается конечное, хотя и весьма малое, электрическое сопротивление. Его учет размораживает силовые линии магнитного поля, тем самым снимая топологический запрет на разрыв и пересоединение силовых линий.

Таким образом, можно «осуществить доступ» к источнику свободной энергии и вызвать неустойчивость, которая может рассматриваться как один из случаев неустойчивостей волн с отрицательной энергией. Общие принципы такого рода неустойчивостей, разобранные в ч. 1, как раз и показывают, что неустойчивость появляется, если можно обеспечить конечную величину диссипации энергии волны.

Электрический ток в возмущении рассматриваемого здесь типа направлен по оси  $y$  и равен

$$j_y = \sigma [E_y - (u_x H_0 / c)]. \quad (2.245)$$

Всюду, за исключением некоторой окрестности нейтральной плоскости, электропроводность плазмы можно считать бесконечной, т. е. пренебрегать левой частью уравнения (2.245). В то же время найдется такая окрестность  $x=0$ , в которой магнитное поле столь мало, что в уравнении (2.245) придется пренебречь вторым членом правой части. Назовем такой слой сингулярным. Очевидно, его толщина  $\delta$  будет зависеть также от того, насколько быстро спадает  $u_x$  при приближении к нейтральной плоскости. Закон спада  $u_x$  в окрестности  $x=0$  существенным образом зависит от конкуренции членов правой части уравнения (2.244). Член в левой части пренебрежимо мал, так как неустойчивость тиринг-моды развивается очень медленно ( $\omega$  мало). В то же время старшую производную в правой части этого уравнения следует сохранить, хотя коэффициент, стоящий перед ней, мал по тем же причинам. Оценку  $\delta$  нетрудно провести, если приближенно третий член в правой части уравнения (2.244) представить в виде

$$(i\omega\rho/k^2) (d^2 u_x / dx^2) \sim (i\omega\rho/k^2) (u_x / \delta^2)$$

и сопоставить его по порядку величины с первым членом правой части того же уравнения. (Второй член при  $x \rightarrow 0$  становится очень малым, так как  $j'_0 \rightarrow 0$  при  $x \rightarrow 0$ ). Итак, получаем

$$(\omega\rho/k^2) (u_x / \delta^2) \sim H_0 j_y / 4\pi c. \quad (2.246)$$

Для оценки величины  $j_y$  достаточно сопоставить его с любым из двух членов правой части уравнения (2.245). Например, со слагаемым  $\sigma (u_x / c) H_0$ . Такой произвол связан с тем, что на границе между внешней областью, где в уравнении (2.245) пренебрегают членом в левой части, и сингулярной областью, в которой пренебрегают вторым членом справа, все члены имеют один и тот же порядок величины. С учетом этого приближенное равенство (2.246) дает после подстановки  $j_y$  и  $H_0 \approx H_m \delta / \Delta$  следующую оценку:

$$\delta \approx \omega^{1/4} c^{1/2} \Delta^{1/2} \rho^{1/4} / k^{1/2} \sigma^{1/4} H_m^{1/2}. \quad (2.247)$$

Теперь рассмотрим внешнюю область, в которой электропроводность условно считается бесконечной. Уравнение для возмущения магнитного поля  $\text{rot } \mathbf{H} = 4\pi \mathbf{j}/c$  с учетом  $\text{div } \mathbf{H} = 0$  можно представить как

$$ik[H_x - (1/k^2)(d^2H_x/dx^2)] = (4\pi/c)j_y \quad (2.248)$$

(пока еще оно является совершенно точным и применимо всюду). Для внешней области в уравнении (2.244) пренебрегают членами с инерцией, так как  $\omega$  мало. Тогда  $j_y = -i(j'_0/kH_0)H_x$ .

Подставляя в (2.248), получаем

$$ik[H_x - (1/k^2)(d^2H_x/dx^2) + (4\pi j'_0/c)H_x/k^2H_0] = 0. \quad (2.249)$$

Перед последним шагом к решению задачи удобно рядом с этим уравнением для магнитного поля во внешней области написать уравнение для магнитного поля во внутренней области

$$ik[H_x - (1/k^2)(d^2H_x/dx^2)] = (4\pi/c)\sigma E_y \quad (2.250)$$

в соответствии с уже обоснованным пренебрежением вторым слагаемым в законе Ома (2.245).

Правый член в (2.250) как раз и учитывает конечную диссипацию (омическую) энергии возмущения, которая является ключом к задаче о неустойчивости типа отрицательной энергии.

Оценим полный баланс диссипируемой энергии. Для этого умножим обе части уравнений (2.245) и (2.250) на  $E_y$ , проинтегрируем по всему плазменному слою и сложим оба уравнения. Физический смысл правой части получившегося выражения ясен: это джоулево тепло  $\int jEdx$ . Левая часть представляет собой изменение энергии магнитного поля возмущения. Дестабилизирующую роль, как уже говорилось, играет член с  $j'_0/H_0$ . Мы не будем вникать в характер решения для возмущения магнитного поля во внешней области. Строгое рассмотрение подтверждает, что существуют возмущения, для которых слагаемое с  $j'_0/H_0$  доминирует. Тогда нетрудно оценить изменение энергии магнитного поля возмущения по порядку величины  $(ik/k^2) \int (j'_0/H_0)H_xE_ydx \sim (i/k) \times \times (c/4\pi\Delta)H_xE_y$ . В итоге получаем условие баланса между ростом энергии магнитного поля возмущения и джоулевой диссипацией:

$$(1/\Delta k)H_xE_y \sim (4\pi/c)\sigma E_y^2\delta. \quad (2.251)$$

Так как электрическое поле легко выразить через магнитное с помощью уравнения Максвелла  $\text{rot } \mathbf{E} = -(1/c)(\partial \mathbf{H}/\partial t)$ , то уравнение (2.251) с учетом  $E_y = (\omega/kc)H_x$  дает заготовку для получения дисперсионного уравнения

$$1/\Delta \sim (4\pi/c)\sigma(\omega/c)\delta. \quad (2.252)$$

Для магнитогидродинамической тиринг-моды величину  $\delta$  мы уже оценили [см. (2.247)]; таким образом, дисперсионное уравнение принимает вид

$$1/\Delta \sim (4\pi/c)\sigma(\omega/c)(\omega^{1/4}/k^{1/2}\sigma^{1/4})(c^{1/2}\Delta^{1/2}\rho^{1/4}/H_m^{1/2}). \quad (2.253)$$

Очевидно, оно всегда дает неустойчивый корень с инкрементом неустойчивости

$$\text{Im } \omega \sim c^{6/5} k^{2/5} H_m^{2/5} / \sigma^{3/5} \Delta^{6/5} \rho^{1/5}. \quad (2.254)$$

Эта оценка по порядку величины согласуется с точным ответом. Можно показать, что имеется полная аналогия рассмотренной плоской задачи о неустойчивости нейтрального слоя с задачей о неустойчивости равновесия плазмы в винтовом магнитном поле. Роль нейтральной плоскости играет магнитная поверхность, на которой  $k_{\parallel} = 0$ , т. е. шаг винта силовой линии магнитного поля совпадает с шагом винта возмущения. Пересоединяющимися являются проекции силовых линий азимутального магнитного поля

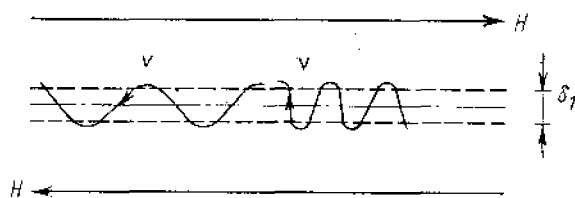


Рис. 2.46. Движение частиц в узком слое вблизи нейтральной плоскости

в винтовой системе координат с шагом винта, соответствующим нейтральной магнитной поверхности. Инкремент неустойчивости имеет такой же порядок величины, что и (2.254). Именно этот тип тиринг-моды привлекают для объяснения некоторых неустойчивостей в токамаке.

Выражение (2.252), использованное здесь как заготовка для получения дисперсионного уравнения, в действительности имеет значение, выходящее за рамки простого магнитогидродинамического приближения. Так, например, при известной осторожности его можно применить даже для случая бесстолкновительной плазмы. Равновесие с нейтральным слоем бесстолкновительной плазмы может иметь физический смысл для так называемого геомагнитного хвоста Земли и в некоторых астрофизических ситуациях. В такой задаче следует представлять себе характер движения частиц в магнитном поле, меняющем знак при переходе через нейтральную плоскость  $x=0$ . Вообще говоря, всюду, за исключением небольшой окрестности  $x=0$ , магнитное поле как бы привязывает частицы к своим силовым линиям, восстанавливая тем самым гидродинамический характер движения плазмы. Однако всегда найдется хотя бы узкий слой некоторой толщины  $\delta_1$ , внутри которого движение частиц не замагничено: они как бы движутся по узкому коридору, отражаясь от его стен. Примерный вид траекторий заряженных частиц изображен на рис. 2.46. Толщину этого коридора  $\delta_1$  можно оценить следующим образом. Очевидно, частицы могут

проникать за его пределы (с возвратом назад) на расстояние порядка ларморовского радиуса. Хотя в столь неоднородном магнитном поле представление о ларморовском радиусе имеет смысл только по порядку величины, оценим его  $v_{Te} mc / eH \sim \delta_1$ . Далее учтем, то  $H_0 / H_m \delta_1 / \Delta$ . Отсюда  $\delta_1 \sim (\Delta r_H)^{1/2}$ .

Естественно считать, что эта величина в бесстолкновительной задаче и будет аналогом толщины сингулярного слоя для тирингмоды. В отсутствие столкновений формальное выражение для электропроводности  $\sigma = ne^2 \tau / m_e$  дает бесконечность. Тем не менее можно воспользоваться этим выражением, если под  $\tau$  подразумевать величину, близкую к той, которая используется в теории твердого тела и плазмы при рассмотрении явления аномального скин-эффекта. В выражении для  $\sigma$  время свободного пролета (ускорения)  $\tau$  не обращается в бесконечность даже при отсутствии столкновений, так как в среднем за время порядка  $\tau \sim 1/kv$  частица сместится вдоль слоя на расстояние порядка длины волны и попадет в об-

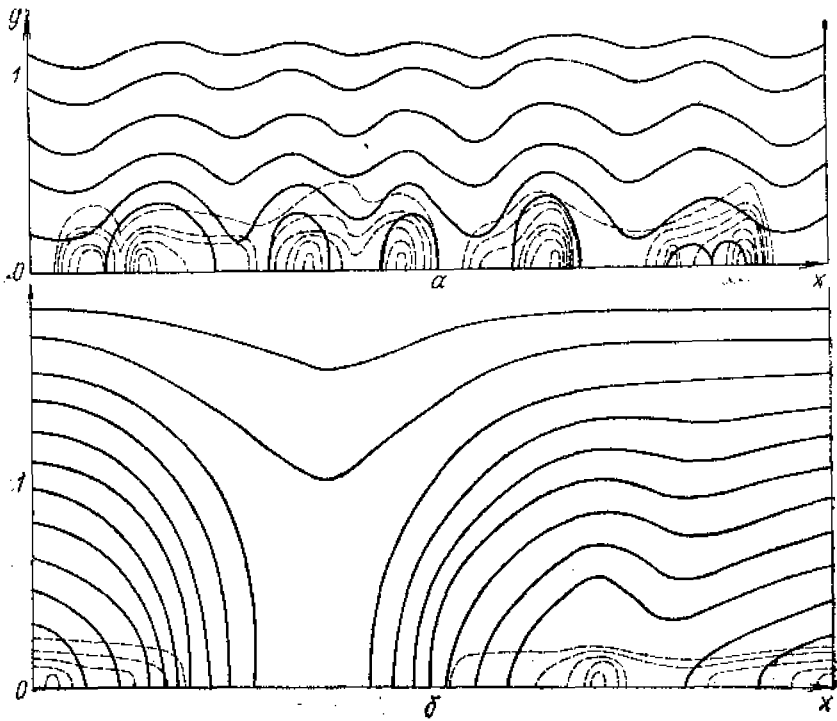


Рис. 2.47. Магнитные силовые линии в верхней части плоского нейтрального слоя плазмы на начальной стадии развития тиринг-неустойчивости (а) и в сильно нелинейном режиме (б) по результатам численного моделирования:

— — — — — изолинии равной плотности плазмы. На начальной стадии неустойчивости приводит к формированию магнитных островов вблизи центра нейтрального слоя. В дальнейшем происходит объединение групп островов (Зеленый Л. М., Ляпатов А. С. «Физика плазмы», 1979, т. 5)

ласть с другой фазой электрического поля  $E_y$ . Естественно ввести некоторую эффективную электропроводность

$$\sigma \sim (ne^2/m_e) (1/kv_{Te}). \quad (2.255)$$

Заметим, что вклад электронов в такую электропроводность в  $(m_i/m_e)^{1/2}$  раз больше ионного. В итоге инкремент нарастания, который находим после подстановки (2.255) в (2.252), имеет порядок величины

$$\text{Im } \omega_e \sim kv_{Te} (r_{He}/\Delta)^{3/2}. \quad (2.256)$$

При получении этой формулы мы воспользовались тем, что в нейтральном слое  $nT = H^2 m / 4\pi$  и, следовательно,  $r_{He} = c/\omega_{pe}$ . Более строгая теория, которая позволяет уточнить численные коэффици-

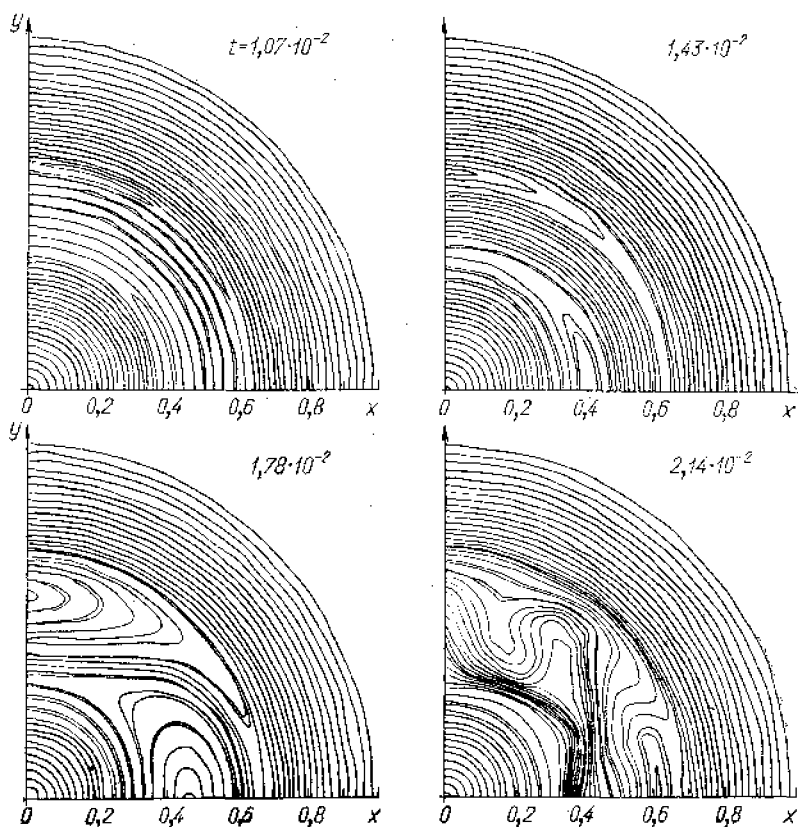


Рис. 2.48. Эволюция во времени двух взаимосвязанных магнитных островов, появляющихся в токамаке в результате развития тиринг-мод в случае, когда на двух различных магнитных поверхностях тиринг-мода имеет одно и то же азимутальное волновое число ( $m=3$ ). На нелинейной стадии происходит слияние разрушенных магнитных островов (White R. M., Monticello D. A., Rosenbluth M. N., Waddel W. Y. Preprint PPL-1282, Princeton, 1976)



денты, потребовала бы использования методов кинетической теории.

Считается, что инкремент неустойчивости (2.256) слишком мал для того, чтобы вызвать заметные эффекты в нейтральном слое геомагнитного хвоста. Если в силу каких-нибудь обстоятельств, например из-за наличия в равновесии небольшой вертикальной компоненты магнитного поля, движение электронов в сингулярном слое замагничено, то нужно учесть ионы. Действуя по уже использованному рецепту  $\delta \sim (r_{Hi} \Delta)^{1/2}$ ;  $\sigma \sim (ne^2/m_i) (1/kv_{Ti})$ , легко найти инкремент неустойчивости, который в этом случае оказывается гораздо большим, чем определяемый формулой (2.256):

$$\text{Im } \omega_i \sim (m_i/m_e)^{1/4} \text{Im } \omega_e. \quad (2.257)$$

Этот режим неустойчивости, по-видимому, может играть важную роль в геофизике. Энергия, высвобождаемая из-за тиринг-неустойчивости геомагнитного хвоста, считается ответственной за явление так называемых магнитосферных суббурь — процессов взрывообразного вторжения плазмы геомагнитного хвоста в магнитосферу и ионосферу Земли.

Развитие бесстолкновительной тиринг-моды в плоском нейтральном слое иллюстрируется на рис. 2.47, который получен в численном эксперименте. Для сравнения на рис. 2.48 показаны конфигурации магнитных поверхностей в токамаке, полученные при исследовании гидродинамической тиринг-моды численными методами.

## § 2.16. «Дрейфовая» неустойчивость плазмы

Магнитная гидродинамика даже при учете конечного электрического сопротивления остается всего лишь некоторой приближенной моделью описания плазмы. Она не полностью учитывает некоторые важные степени свободы, как, например, относительное движение ионной и электронной компонент. Неустойчивости, связанные с такими дополнительными степенями свободы, могут играть в физике плазмы большую роль. Разумеется, плазма должна быть достаточно разреженной, чтобы реализовать их. Среди этих неустойчивостей основную роль играет так называемая дрейфовая неустойчивость. Соответствующий ей тип движения плазмы — «дрейфовые» волны — складывается из практически свободного перетекания электронов вдоль силовых линий магнитного поля и движения ионов в основном поперек магнитных силовых линий.

В самой простой форме для описания этих эффектов в обобщенном законе Ома нужно учесть градиент давления электронной компоненты. Исследование этого эффекта привело к обнаружению так называемых дрейфовых неустойчивостей, теория которых к настоящему времени разработана достаточно детально.

Попытаемся в общих чертах изложить основные представления о физическом механизме явлений, относящихся к этому классу.

С чисто математической точки зрения мы будем при этом все время только скользить по поверхности теории, оставаясь на грани качественного и количественного анализа. Нетрудно найти оправдание для такого нестрогого подхода. Дело в том, что, переходя от изучения относительно простых видов магнитогидродинамической неустойчивости идеально проводящей плазмы к эффектам, связанным с диссипативными силами, и далее — к дрейфовым неустойчивостям, мы вступаем в район все более сложных теоретических построений, которые к тому же имеют гораздо меньшую опору со стороны эксперимента.

Одним из исходных пунктов в исследовании нового класса неустойчивостей служит уравнение движения электронной компоненты. В наиболее общем случае его можно записать в виде [см. (2.58)]

$$m_e n \frac{d\mathbf{u}_e}{dt} + \nabla p_e = -en\mathbf{E} - \frac{en}{c} [\mathbf{u}_e \times \mathbf{H}] + \frac{m_e \mathbf{j}}{ev}. \quad (2.258)$$

Последний член в правой части есть сила трения между электронами и ионами.

Изучая механизм развития диссипативных неустойчивостей, мы использовали проекцию этого уравнения на направление, параллельное  $\mathbf{H}$ , и при этом пренебрегали инерционным членом и величиной  $\nabla p_{1e}$ , считая их малыми по сравнению с силой трения. Именно на указанных допущениях основано применение закона Ома в его простейшей форме  $\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}_\perp$ .

Теперь поступим иначе: пренебрежем силой трения, но будем учитывать  $\nabla p_{1e}$ . При этом из (2.258) следует, что

$$\nabla p_{1e} = -en\mathbf{E}_\perp. \quad (2.259)$$

Инерционный член по-прежнему считается малым. Соотношение (2.259) в теории дрейфовых неустойчивостей часто используется в качестве эквивалента закона Ома.

Рассмотрим снова плоский слой плазмы, в котором при отсутствии возмущений концентрация  $n(x)$  плавно меняется вдоль оси  $x$ . Магнитное поле  $\mathbf{H}$ , как и ранее, будем считать однородным и направленным вдоль оси  $z$ . Допустим далее, для простоты, что температура электронов  $T_e$  постоянна по всему слою. Для «стандартных» возмущений плотности типа плоской волны ( $\exp(ik_y y + ik_z z - i\omega t)$ ) из (2.259) в линейном приближении следует уравнение для возмущения плотности электронов  $n_{1e}$ :

$$n_{1e} T_e = n_0 e \phi_1, \quad (2.260)$$

где  $\phi_1$  — возмущение электрического потенциала. Это так называемое бальмановское распределение, уже использовавшееся ранее.

Если так же, как это было сделано при анализе гравитационной неустойчивости, пренебречь продольным движением ионов и, кроме того, учесть, что поперечное движение обусловлено элек-

трическим дрейфом, то уравнение непрерывности можно записать в виде

$$-i\omega n_{i1} - ik_y (c\varphi_1/H_0) dn_0/dx = 0. \quad (2.261)$$

С помощью (2.260) и (2.261) из условия квазинейтральности  $n_{ie} = n_{ii}$  можно найти дисперсионное соотношение

$$\omega = -k_y (cT_e/eH_0) (1/n_0) (dn_0/dx). \quad (2.262)$$

Здесь  $[(1/n_0) dn_0/dx]^{-1}$  — характерный размер неоднородной плазмы, который имеет тот же порядок величины, что и радиус поперечного сечения плазменного шнура  $a$ .

Эта волна называется дрейфовой, так как скорость ее распространения в направлении, перпендикулярном к  $\mathbf{H}$ , по порядку величины совпадает со скоростью дрейфового движения неоднородной плазмы (при  $T_i \sim T_e$  величина этой скорости пропорциональна  $r_{He} v_{Te}/a \sim r_{Hi} v_{Ti}/a$ ). Пределы применимости полученного выражения для частоты дрейфовой волны вытекают из условия, чтобы фазовая скорость в продольном направлении  $\omega/k_z$  лежала в интервале, определяемом неравенствами

$$v_{Te} \sqrt{m_e/m_i} < \omega/k_z < v_{Te}. \quad (2.263)$$

Если  $\omega/k_z$  приближается к  $v_{Te}$ , то необходимо учитывать инерционный член в уравнении для электронов; при этом выражение для  $\omega$  изменяется. В другом крайнем случае, когда  $\omega/k_z$  стремится к  $v_{Te} \sqrt{m_e/m_i}$ , дрейфовая волна в плазме с холодными ионами ( $T_e \gg T_i$ ) переходит в ионно-звуковую, при этом существенное значение приобретает продольное движение ионов. Если же ионы имеют температуру, близкую к электронной, то  $v_{Te} \sqrt{m_e/m_i} \sim v_{Ti}$ , и поэтому вступает в действие сильный механизм затухания волны на ионах (затухание Ландау), вследствие чего волна не может распространяться. Заметим, что из условия  $\omega/k_z > v_{Ti}$  следует, что

$$k_z/k_y < r_{Hi}/a. \quad (2.264)$$

В сильном магнитном поле  $r_{Hi}/a \ll 1$ , и, таким образом, дрейфовая волна должна быть сильно вытянутой вдоль магнитного поля.

Рассмотрим теперь свойства дрейфовых волн для привычной геометрии плазменного шнура в магнитном поле, ограничиваясь, как обычно, случаем, когда  $H_\varphi \ll H_z$ . При слабой тороидальности, т. е. в случае, когда радиус сечения плазменного шнура  $a$  очень мал по сравнению с длиной витка  $L$ , элементарное волновое возмущение зависит от координат по закону  $\exp(i n\varphi - 2\pi m z/L)$ . Волновой вектор  $k_{||}$  в направлении магнитного поля для такого возмущения обращается в нуль на замкнутой силовой линии с углом полного поворота  $\Omega$ , равным  $2\pi m/n$ . Согласно (2.215) вблизи такой замкнутой линии, лежащей на магнитной поверхности радиуса  $r$ ,

$$k_{||} = k_\varphi (\Delta r/r) \theta_s. \quad (2.265)$$

где  $\theta_s$  — величина шири,  $k_c$  — азимутальная составляющая волнового вектора. Выражение, определяющее частоту волны для тороидальной системы, должно быть аналогично (2.262) при замене  $k_y$  на  $k_\varphi$ . Из условия  $\omega/k_\parallel > v_{Ti}$  и выражения (2.262) для  $\omega$  следует

$$\Delta r < r_{Hi}/\theta_s. \quad (2.266)$$

Таким образом, при наличии шири дрейфовая волна с индексами  $n$  и  $m$  локализована в узкой области вблизи магнитной поверхности с радиусом  $r_0$ , на которой шаг возмущения совпадает с шагом силовой линии. Если температура ионов не очень сильно отличается от температуры электронов, то за пределами области (2.266) возмущения типа дрейфовых волн быстро затухают. Следует отметить, что, как показывает детальный анализ различных механизмов возбуждения дрейфовых колебаний, в большинстве случаев ширина области локализации возмущений плазмы оказывается во много раз меньшей, чем  $r_{Hi}/\theta_s$ .

Пренебрегая влиянием сил трения и сил инерции в уравнениях движения, получаем для частоты дрейфовых волн чисто вещественную величину. Это означает, что такие волны представляют собой гармонические колебания, распространяющиеся в пределах своей области локализации без заметного затухания или нарастания. Они не могут приводить к переносу частиц поперек магнитного поля, т. е. вызывать аномальную диффузию плазмы. В этом можно убедиться на основе следующих достаточно общих соображений.

При медленных колебаниях типа дрейфовых волн в плазме с достаточно высокой температурой справедливо соотношение (2.260), связывающее продольные компоненты градиентов давления и электрического потенциала. Вследствие очень большой продольной теплопроводности плазмы электронная температура должна сохранять постоянное значение во всех точках одной и той же силовой линии. Поэтому, интегрируя обе части (2.259) вдоль  $\mathbf{H}$ , получаем

$$\varphi = (kT_e/e) \ln n_e + \varphi_0. \quad (2.267)$$

В замкнутой магнитной системе с вращательным преобразованием каждая бесконечная силовая линия порождает и повсюду плотно заполняет тороидальную магнитную поверхность. Очевидно, что уравнение (2.267) связывает значения  $n_e$  и  $\varphi$  во всех точках такой поверхности, а  $\varphi_0$  изменяется только при переходе от одной магнитной поверхности к другой. Таким образом, на каждой магнитной поверхности устанавливается бoльцмановское распределение электронов.

Из (2.267) следует, что для всех компонент градиента электронного давления, лежащих на заданной поверхности, справедливо соотношение

$$\partial p_e / \partial s = -en_e E_s. \quad (2.268)$$

При возбуждении дрейфовых волн поведение электронной компоненты описывается уравнением

$$\nabla p_e = -en\mathbf{E} - (e/c)[\mathbf{u}_e \times \mathbf{H}]. \quad (2.269)$$

В силу (2.268) проекция  $[\mathbf{u}_e \times \mathbf{H}]$  на любое направление, касательное к выбранной магнитной поверхности, равна нулю. Отсюда следует, что компонента скорости  $u_{en}$ , перпендикулярная к магнитной поверхности, также равна нулю, т. е. переход электронов от одной магнитной поверхности к другой запрещен.

Если учесть силу трения между электронами и ионами, то у частоты может появиться мнимая добавка ( $\omega = \omega_0 + i\gamma$ ), что означает раскочку дрейфовых волн. Единственным условием для их раскочки является неоднородность плазмы по отношению к распределению плотности или температуры. Поэтому в литературе по теории плазмы неустойчивости такого типа иногда называются также универсальными неустойчивостями.

Рассмотрим сначала случай, когда температуру в невозмущенной плазме (т. е. в исходном состоянии) можно считать постоянной по всему объему, а плотность плазмы неоднородна. Пусть в слое плазмы возникает возмущение типа плоской волны ( $\exp(-i\omega t + ik_y y + ik_z z)$ ). Из уравнения движения (2.258) при учете малого инерционного члена следует, что

$$\mathbf{j}_{1\perp} = (c/H^2)[\mathbf{H} \times (-in\omega m_i \mathbf{u}_i + \nabla p_i)]. \quad (2.270)$$

Движение ионов в первом приближении определяется электрическим дрейфом. Поэтому в уравнении (2.270) вместо  $\mathbf{u}_i$  можно подставить  $[(c/H^2)\mathbf{H} \times \nabla \varphi]$ . Принимая во внимание условие  $\text{div } \mathbf{j}_1 = 0$ , находим следующее соотношение между компонентами плотности тока:

$$j_{1z} = (i/k_z) \text{div } j_{1\perp}. \quad (2.271)$$

Применяя известную формулу векторного анализа\*, получаем из (2.270) и (2.271)

$$\text{div } \mathbf{j}_{1\perp} = (i\omega m_i c/H^2) \mathbf{H} \cdot \text{rot } n \mathbf{u}_i. \quad (2.271a)$$

Используя выражение для  $\mathbf{u}_i$ , можем привести (2.271) к виду

$$j_{1z} = (k_y^2/k_z^2) \omega n_0 (m_i c^2/H^2) \varphi. \quad (2.272)$$

Линеаризованное уравнение непрерывности имеет вид [см. уравнение (2.261)]

$$-i\omega n_1 - (c/H) ik_y \varphi dn_0/dx = 0, \quad (2.273)$$

а уравнение движения для электронов в направлении, параллельном магнитному полю (с учетом силы трения), можно записать следующим образом:

$$ik_z n_1 T_e = en_0 ik_z \varphi + (m_e/\nu) j_{1z}. \quad (2.274)$$

\*  $\text{div}[\mathbf{A} \times \mathbf{B}] = \mathbf{B} \cdot \text{rot } \mathbf{A} - \mathbf{A} \cdot \text{rot } \mathbf{B}$ .

Решение системы (2.272) — (2.274) дает следующее дисперсионное уравнение:

$$\omega^2 - i\omega_s\omega + i\omega_s\omega_d = 0, \quad (2.275)$$

где  $\omega_s = (k_z^2/k_y^2)\omega_{He}\omega_{Ht}\tau_{ei}$ ; ( $\tau_{ei} = 1/\nu$ ), а  $\omega_d = -(k_y c T_e / e H n_0) \times (dn_0/dx)$  — дрейфовая частота (2.262). При очень частых соударениях, а следовательно, малых  $\tau_{ei}$ ,  $\omega_s \ll \omega_d$  из дисперсионного уравнения имеем  $\omega \approx \pm i(\omega_s \omega_d)^{1/2}$ . Скорость нарастания этой так называемой дрейфово-диссипативной неустойчивости становится максимальной и сравнимой с самой дрейфовой частотой  $\text{Im } \omega \sim \omega_d$  при условии  $\omega_s \sim \omega_d$ .

Эти соотношения реализуются лишь в достаточно холодной плазме газового разряда или в условиях ионосферы (когда время свободного пробега электронов может еще уменьшиться в результате столкновений с нейтральными частицами). Поэтому дрейфово-диссипативная неустойчивость такого типа не представляет опасности для высокотемпературной плазмы в магнитных ловушках. Но в свое время, на заре термоядерных исследований, считалось, что моделирование магнитного удержания плазмы можно проводить в сравнительно холодной плазме газового разряда. Тогда в течение длительного времени оставалось неразгаданным явление так называемой боровской аномальной диффузии. На основе некоторых данных ранних исследований диффузии плазмы поперек магнитного поля Д. Бом постулировал, что коэффициент аномальной диффузии

$$D_{\perp} = cT/16eH. \quad (2.276)$$

Он предположил, что причиной такой аномалии является неустойчивость неизвестной природы, переводящая плазму в турбулентное состояние.

Многие первые попытки разгадать механизм этой гипотетической неустойчивости оказались безрезультатными. Но сразу, как только была открыта дрейфово-диссипативная неустойчивость, одного взгляда на ее максимальный инкремент  $\sim \omega_d = kc(T/eH)(n'/n)$  было достаточно, чтобы сделать вывод: если существует диффузия Бом, причиной должна быть именно эта неустойчивость.

В высокотемпературной плазме, как правило,  $\omega_s \gg \omega_d$ , и для частоты колебаний получаем

$$\omega = \omega_d + i(\omega_d^2/\omega_s). \quad (2.277)$$

Чем больше  $\tau_{ei}$ , тем больше  $\omega_s$  и меньше инкремент неустойчивости. Точно такую же роль играет шир, увеличивающий эффективную величину  $k_{\parallel}$ , а значит, и  $\omega_s$ . Поэтому дрейфово-диссипативная неустойчивость такого типа оказывается неопасной.

Следует также отметить, что в высокотемпературной плазме, где обычные силы трения между электронами и ионами малы, на первый план выступает бесстолкновительный аналог дрейфово-диссипативной неустойчивости, в которой роль диссипативных сил играет затухание Ландау. Сама неустойчивость принимает в ука-

занном случае вид резонансной раскачки дрейфовых волн электронами, продольная скорость которых совпадает с фазовой скоростью волны  $\omega/k_z$ .

Оценку инкремента неустойчивости нетрудно провести традиционным методом, вычисляя работу поля волны над резонансными частицами ( $\omega \approx k_z v_z$ ). Кинетическое уравнение для электронов в дрейфовом приближении будет иметь вид [см. (2.53)]

$$-i\omega f_1 + ik_z v_z f_1 + c \frac{E_y}{H_0} \frac{\partial f_0}{\partial x} - \frac{eE_z}{m_e} \frac{\partial f_0}{\partial v_z} = 0.$$

Это уравнение отличается от обычного линеаризованного уравнения (1.83) наличием слагаемого  $(c(E_y/H_0)(\partial f_0/\partial x))$ , учитывающего перенос электронов со скоростью электрического дрейфа  $cE_y/H_0$ . Тогда поправка  $f_1$  к функции распределения

$$f_1 = \frac{-1}{\omega - k_z v_z} \left\{ c \frac{E_y}{H_0} \frac{\partial f_0}{\partial x} - \frac{eE_z}{m_e} \frac{\partial f_0}{\partial v_z} \right\}. \quad (2.278)$$

Вычислим работу электрического поля волны над резонансными электронами:

$$\begin{aligned} \overline{j_z E_z} &= -e \operatorname{Im} \int \frac{E_z v_z dv_z}{\omega - k_z v_z} \left\{ c \frac{E_y}{H_0} \frac{\partial f_0}{\partial x} - \frac{eE_z}{m_e} \frac{\partial f_0}{\partial v_z} \right\} \approx \\ &\approx \frac{e\pi\omega}{|k_z| k_z} E_z \left\{ c \frac{E_y}{H_0} \frac{\partial f_0}{\partial x} \Big|_{v_z=\omega/k_z} - \frac{eE_z}{m_e} \frac{\partial f_0}{\partial v_z} \Big|_{v_z=\omega/k_z} \right\}. \end{aligned} \quad (2.279)$$

Знак этой работы, определяющий устойчивость или неустойчивость системы, зависит от конкуренции двух слагаемых. Второе из них описывает обычное затухание Ландау и при отсутствии эффекта типа пучковой неустойчивости ( $df/dv > 0$ ) играет стабилизирующую роль. Первое же слагаемое описывает высвобождение энергии при расширении плазмы и является источником дрейфовой неустойчивости.

Вычисление суммы в (2.279) проводится автоматически для случая, например, максвелловского распределения плазмы  $f_0 \sim \sim cn_0(x) \exp(-m_e v_z^2/2T)$  с однородной температурой и дает

$$\overline{j_z E_z} = \frac{e^2 \pi \omega}{k_z^2 T |k_z|} |E_z|^2 f_0 \left( v_z = \frac{\omega}{k_z} \right) (\omega - \omega_d). \quad (2.280)$$

Здесь учтено, что  $E_y = (k_y/k_z) E_z$  (из  $E = -\operatorname{grad} \phi$ );  $\omega_d$  определяется соотношением (2.262). Таким образом, для простой дрейфовой волны, описываемой формулой (2.262), имеет место точная взаимная компенсация обоих конкурирующих процессов. Однако при учете неоднородности температуры первое слагаемое может перевесить, и тогда возникает неустойчивость. Кроме того, более тонкие рассуждения показывают, что с уменьшением длины волны дрейфовых колебаний в направлении, перпендикулярном к силовым линиям магнитного поля, частота  $\omega$  всегда оказывается меньше, чем дает простая модель (2.262). Это также ведет к неустойчивости.

Такая неустойчивость уже не зависит от деталей конфигурации плазмы. Поэтому ее также иногда называют универсальной. Наиболее эффективным средством борьбы с ней является шир — перекрещенность силовых линий магнитного поля.

По этой причине рассматриваемая форма неустойчивости не представляет катастрофической опасности для удержания энергии и частиц в плазме. В конечном счете малая эффективность этой разновидности дрейфовой неустойчивости связана с тем, что при медленных дрейфовых колебаниях электроны успевают распределяться по Больцману.

Большую опасность представляет неустойчивость, обусловленная не градиентом плотности, а градиентом температуры. Эта неустойчивость называется температурно-дрейфовой. Допустим для простоты, что спад температуры от осевой линии плазменного витка к его поверхности происходит по гораздо более крутой кривой, чем спад концентрации, т. е.  $(d \ln T / d \ln n) \gg 1$ . В указанном случае в линеаризованном уравнении непрерывности для ионов можно пренебречь членом, содержащим  $dn_0/dx$ , но при этом уже нельзя исключить член, пропорциональный продольной скорости  $u_{1z}$ . Следовательно, уравнение непрерывности принимает вид

$$-i\omega n_1 + ik_z u_{1z} n_0 = 0. \quad (2.281)$$

Физический смысл этого соотношения заключается в том, что при движении, для которого  $\text{div } n_0 u_{1\perp} = 0$ , единственной причиной изменения плотности может быть только продольное сжатие или разрежение плазмы.

Компоненту скорости  $u_{1z}$  можно найти из уравнения, описывающего продольное движение ионов плазмы:

$$-i\omega n_0 m_i u_{1z} + ik_z (n_0 T_1 + n_1 T_0) = -ik_z \varphi_1 e. \quad (2.282)$$

Если пренебречь теплопроводностью, то уравнение теплового баланса можно записать в виде

$$-i\omega T_1 - i(c/H) k_y \varphi_1 dT_0/dx = 0. \quad (2.283)$$

Электроны можно считать распределенными по Больцману. Это означает, что имеет место соотношение  $e\varphi_1 = (n_1/n) T_0$ . Подставляя это выражение для  $\varphi_1$  в уравнение (2.282) и решая систему (2.282) — (2.283), получаем следующее уравнение для определения  $\omega$ :

$$\omega^3 = (\omega + (1/2)\omega_T) k_z^2 c_s^2, \quad (2.284)$$

где  $\omega_T = (c/eH) k_y (dT/dx)$ ;  $c_s = \sqrt{2T/m_i}$ . При  $\omega_T \gg k_z c_s$  уравнение (2.284) сводится к более простому:

$$\omega^3 = (1/2)\omega_T k_z^2 c_s^2. \quad (2.285)$$

Последнее уравнение имеет три корня, среди которых один действительный и два комплексных. Один из комплексных корней соответствует раскачке малых возмущений. При этом инкремент оказывается порядка частоты.



Более строгий теоретический анализ показывает, что в плотной плазме неустойчивость имеет место, если  $\eta = (d \ln T / d \ln n) > 2/3$ . В разреженной плазме, где роль сил трения играет затухание Ландау, неустойчивость должна проявляться при  $\eta > 2$  для длинноволновых колебаний ( $k_y r_{Hi} \ll 1$ ) и при  $\eta > 1$  для коротковолновых ( $k_y r_{Hi} \sim 1$ ). Раскачка имеет место при  $\omega_T > 2k_z c_s$ . Для подавления этой разновидности дрейфовой неустойчивости потребовался бы более сильный шир. Поэтому ее нельзя исключить как возможный источник дополнительной потери тепла из плазмы в токамаке.

Интересные модификации дрейфовых неустойчивостей возможны в многокомпонентной плазме. Примером такой плазмы может служить плазма с примесями. Вообще проблема примесей является одной из основных проблем управляемого синтеза. В магнитных ловушках вблизи стенок камеры неизбежно наличие некоторого количества тяжелых ионов примесей (ионов, выбитых из стенок) с большим зарядовым числом  $Z \gg 1$ . Хорошо известно, что наличие примесей нежелательно для проблемы управляемого термоядерного синтеза, поскольку даже небольшое число примесей с большим зарядовым числом существенно увеличит потери на излучение (см. § 1.8).

Менее известным является тот факт, что наличие примесей приводит к появлению новой ветви дрейфовой неустойчивости плазмы. Механизм этой неустойчивости становится довольно простым, если использовать изложенный выше подход к дрейфовым волнам.

В рассматриваемом теперь случае неустойчивыми оказываются достаточно медленные возмущения, фазовая скорость которых вдоль магнитного поля мала по сравнению с тепловой скоростью водородных ионов, но существенно больше тепловой скорости тяжелых примесных ионов:

$$v^H_T < \omega / k_z < v^H_T \ll v_{Te}. \quad (2.286)$$

В этом случае не только электроны, но и водородные ионы успевают приобрести больцмановское распределение (2.260). Что же касается примесных ионов, то их плотность находится из гидродинамического уравнения непрерывности (2.261). В этом случае из условия квазинейтральности имеем вместо (2.262) следующую формулу для частоты медленных дрейфовых движений в трехкомпонентной плазме:

$$(e/T_e)n_e = -(e/T_i)n^H_0 - (ck_y/H_0)(dn^I_0/dx)(Z/\omega),$$

т. е.

$$\omega = -(ck_y/eH_0)(dn^I_0/dx)[Z/(n_{0e}/T_e + n_{0H}/T_H)]. \quad (2.287)$$

Так же, как и в случае универсальной дрейфовой неустойчивости, раскачка рассматриваемой здесь дрейфовой волны связана с тем, что в формуле для работы электрического поля волны над резонансными частицами (2.279) наряду с обычными для однородной плазмы слагаемыми, пропорциональными  $E_z(\partial f_0/\partial v_z)$ , имеется также слагаемое, пропорциональное  $E_y(\partial f_0/\partial x)$ . При этом в силу

условия (2.286) основной вклад в работу поля над частицами дает взаимодействие с резонансными ионами водорода (в отличие от универсальной дрейфовой неустойчивости, при которой  $v_{Ti} < \omega/k_z < v_{Te}$  и существенно только резонансное взаимодействие волны с электронами). В этом случае инкремент нарастания дрейфовой волны

$$\gamma \sim [\partial_0^{*H} / \partial v_z + (k_y/k_z) (cT_H/eH_0) (\partial_0^{*H} / \partial x)] |_{v_z = \omega/k_z} \quad (2.288)$$

Считая температуру плазмы однородной, получаем из (2.288) следующее условие возникновения неустойчивости:

$$1 + (k_y/\omega) (cT_H/eH_0) (1/n^{H_0}) (dn^{H_0}/dx) < 0. \quad (2.289)$$

Используя формулу (2.287) для частоты, это условие можно записать в виде

$$T_e / (T_e + T_H) + (dn^{H_0}/dx) [Z (dn^{I_0}/dx)]^{-1} < 0. \quad (2.290)$$

Очевидно, для возникновения рассматриваемой неустойчивости знаки градиентов плотности для основных и примесных ионов должны быть противоположными, что действительно имеет место у стенок камеры. Эта неустойчивость может быть опасна тем, что приводит к усиленной диффузии примесных ионов в глубь плазмы.

Любопытным аналогом дополнительной примесной компоненты могут служить частицы, запертые в тороидальных ловушках. Различие между пролетными и захваченными частицами наиболее существенно проявляется для медленных возмущений с  $\omega/k_z \ll v_{Ti}$ .

В электрическом поле, обусловленном таким возмущением, пролетные ионы и электроны успевают приобрести бальмовское распределение (2.260), в то время как возмущение плотности захваченных частиц можно определить из уравнения непрерывности (2.261). В этом уравнении, однако, надо учесть, что из-за столкновения частицы покидают конус захвата с некоторой частотой  $\nu_1$ . С учетом этого следует модифицировать уравнение непрерывности (2.261) следующим образом:

$$i \omega n_1^{tr} + i k_y \varphi \frac{c}{H_0} \delta \frac{dn_0}{dx} - \nu_1 n_1^{tr} = 0, \quad (2.291)$$

где  $\delta = \sqrt{\epsilon}$  — доля захваченных частиц в равновесном состоянии\*. При выделении  $\nu_1$  следует учесть, что из-за существования конуса захвата функция распределения в равновесном состоянии имеет большие градиенты по скорости (меняется на интервале ско-

\* Поскольку глубина магнитной ямы, в которую захватываются частицы, порядка  $\mu \Delta H$ , где  $\Delta H = H_0 a/R$ ,  $a/R$  — отношение малого радиуса тора к большому, то из максвелловского распределения по скоростям будут захватываться только частицы с достаточно малыми продольными скоростями:

$$v_{||} \leq v_T \sqrt{\Delta H/H_0} \approx v_T \sqrt{a/R}.$$

Таким образом, доля захваченных частиц  $\delta = \sqrt{\epsilon}$ ,  $\epsilon = a/R$ .

рости  $v \sim \sqrt{\varepsilon v_T}$ ). В этом случае в интеграле столкновений Ландау достаточно учесть только слагаемое со старшей (второй) производной [см. уравнение (1.98)]. Таким образом,  $v_i = v/\varepsilon$ . Тогда из уравнения непрерывности (2.291) имеем следующую формулу для возмущения плотности захваченных частиц (электронов и ионов):

$$n_i^{\text{tr}} = -1/(\omega + i v_i/\varepsilon) (c/H_0) k_y \varphi \delta (dn_0/dx). \quad (2.292)$$

В этом случае из условия квазинейтральности

$$n_{ie} + n_{ie}^{\text{tr}} = n_{ii} + n_{ii}^{\text{tr}}$$

вместо формулы (2.262) имеем для частоты дрейфовых колебаний следующее дисперсионное уравнение:

$$2 = -\omega_d \sqrt{\varepsilon} / (\omega + i v_e/\varepsilon) + \omega_d \sqrt{\varepsilon} / (\omega + i v_i/\varepsilon). \quad (2.293)$$

Здесь  $\omega_d$  — частота дрейфовых колебаний, определяемая уравнением (2.262). Слагаемое в левой части дисперсионного уравнения описывает вклад пролетных электронов и ионов, имеющих максвелловское распределение (для простоты считаем, что ионы и электроны имеют одинаковую температуру:  $T_e = T_i$ ). В правой части дисперсионного уравнения представлены вклады от запертых электронов и запертых ионов. Исследуем случай, когда  $v_i/\varepsilon < \omega < v_e/\varepsilon$ , наиболее важный для термоядерных ловушек. Тогда из (2.293) имеем следующее решение дисперсионного уравнения:

$$2\omega = \omega_d \sqrt{\varepsilon} [1 - i(v_i/\varepsilon\omega)] + i\omega (\omega_d \varepsilon^{3/2}/v_e),$$

т. е.

$$\omega = (\sqrt{\varepsilon}/2) \omega_d + i(\omega_d^2/2v_e) \varepsilon^2 - 2iv_i/\varepsilon. \quad (2.294)$$

Таким образом, при

$$v_e v_i < \omega_d^2 \varepsilon^3/4, \quad (2.295)$$

имеет место так называемая дрейфово-диссипативная неустойчивость на запертых частицах. Эту моду неустойчивости, по-видимому, невозможно полностью подавить. Поэтому следует ожидать, что она служит дополнительным (но не катастрофическим) каналом утечки из тороидальных плазменных ловушек.

## § 2.17. Микронеустойчивость плазмы и аномальная диффузия

В отличие от крупномасштабных магнитогидродинамических неустойчивостей, способных вызвать катастрофическое изменение исходного равновесия плазмы, мелкомасштабные неустойчивости (микронеустойчивости) типа дрейфовых не приводят к немедленному изменению равновесия. Следует ожидать, что они вызывают появление мелкомасштабных пульсаций с характерными пространственными размерами порядка наиболее неустойчивых длин волн исходных линейных возмущений. А характерные частоты пульсаций, вообще говоря, должны вести свое происхождение

## Систематизация микронеустойчивостей неоднородной плазмы

Тип неустойчивости	Характерная длина волны	Частота	Инкремент нарастания
Дрейфово-диссипативная	$r_{Hi} < \lambda_{\perp} < a$	$\omega_d$	$< \omega_d$
Дрейфовая („универсальная“)	$\lambda_{\perp} \leq r_{Hi}$	$\omega_d$	$\sim \frac{\omega}{k_{\parallel} v_{Te}} \omega_d$
Дрейфово-температурная	$\lambda_{\perp} \geq r_{Hi}$	$\omega_d$	$\sim \omega_d$
Дрейфовые неустойчивости на запертых электронах и ионах	$\lambda_{\perp} \sim r_{Hi}$	$\omega_d (a/R)^{1/2} \lesssim \omega \lesssim \omega_d$	$< (a/R)^{1/2} \omega_d$
Токово-конвективная	$\lambda_{\perp} > r_{Hi}$	Апериодическая	$(m_e/m_i)^{1/2} \frac{u_0}{a}$

от частот наиболее неустойчивых мод неустойчивости. Установление же амплитуд пульсаций в возникающем нелинейном режиме является наиболее трудной задачей. Из общих соображений можно лишь заключить, что неустойчивости с большим инкрементом нарастания, вообще говоря, должны приводить к большим амплитудам. В указанном смысле полезно провести систематизацию микронеустойчивостей равновесия плазмы в магнитном поле на основе проведенного в § 2.14—2.16 анализа (табл. 2.1).

Спектры низкочастотных флуктуаций плазмы, возникающих из-за микронеустойчивостей, которые наблюдались на токамаке в Принстоне, приведены на рис. 2.49. Наиболее важным следствием турбулентных пульсаций, возникающих в результате микронеустойчивостей плазмы, является увеличение потоков частиц и тепла поперек удерживающего плазму магнитного поля. В среднем такое турбулентное просачивание плазмы поперек  $\mathbf{H}$  носит диффузионный характер, поэтому часто говорят об аномальных диффузии и теплопроводности.

В случае, если возникающая турбулентность может быть представлена в виде суперпозиции большого числа слабо взаимодействующих между собой элементарных колебаний, явление аномальной диф-

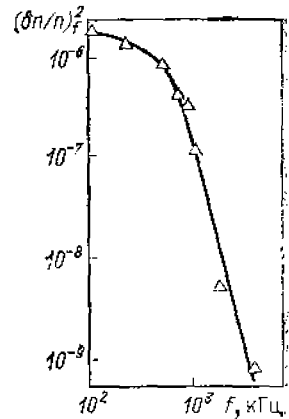


Рис. 2.49. Спектр флуктуаций плотности плазмы в токамаке, измеренный методом рассеяния пучка микроволнового излучения. (Okabayashi M., Arunasalam V. «Nucl. Fusion», 1977, v. 7, p. 497)

Верхняя граница спектра (он резко обрывается при частотах  $10^3$  кГц) согласуется с оценкой максимальной частоты дрейфовых волн по формуле (2.262) при  $k_{\parallel} \sim 1/r_{Hi}$

диффузии можно описывать на языке метода слабой турбулентности. Первым шагом в этой схеме является использование квазилинейного приближения. Функция распределения электронов (ионов), как обычно, разбивается на быстро осциллирующую и медленно меняющуюся части. Ограничимся кинетическим уравнением в дрейфовом приближении:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + c \frac{[\mathbf{E} \times \mathbf{H}_0]}{H_0^2} \nabla_{\perp} f + v_{\parallel} \frac{\mathbf{H}}{H_0} \nabla_{\parallel} f + \frac{eE_z}{m} \frac{\partial f}{\partial v_z} = 0. \quad (2.296)$$

Аномальная диффузия появляется при усреднении второго и третьего членов этого уравнения, т. е. за счет пульсаций вследствие электрического дрейфа и блужданий силовой линии магнитного поля. Для простоты не будем рассматривать последний эффект (его физический смысл практически уже разобран в § 2.10 при обсуждении разрушения магнитных поверхностей). Поле колебаний  $E_y$  представим в виде

$$E_y = \sum_{\mathbf{k}} E_{\mathbf{k}y} \exp(-i\omega_{\mathbf{k}} t + i\mathbf{k}\mathbf{r}).$$

Выражение для быстро осциллирующей части уже получено в § 2.16 [см. формулу (2.278)]. После обычной процедуры усреднения (для сравнения см. § 1.16) получаем уравнение для медленно меняющейся части

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \sum_{\mathbf{k}} \left( \frac{c}{H} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{e}{m} \frac{k_z}{k_y} \frac{\partial}{\partial v_z} \right) E_{y\mathbf{k}}^2 \operatorname{Im} \frac{1}{\omega - k_z v_z} \left( \frac{c}{H} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{e}{m} \frac{k_z}{k_y} \frac{\partial}{\partial v_z} \right) f. \quad (2.297)$$

Здесь в явном виде содержится диффузионный член с коэффициентом диффузии резонансных частиц

$$D_{\perp} = \sum_{\mathbf{k}} (cE_{y\mathbf{k}}/H_0)^2 \operatorname{Im} (1/\omega - k_z v_z). \quad (2.298)$$

Таким образом, задание спектра флуктуаций электрического поля автоматически определяет скорость диффузии.

Любопытное вырождение возникает для мод с  $k_{\parallel} = 0$ :

$$\operatorname{Im} \frac{1}{\omega - k_z v_z} \rightarrow \operatorname{Im} \frac{1}{\omega} = \frac{\gamma}{\omega^2 + \gamma^2},$$

где  $\gamma$  — мнимая часть частоты соответствующей моды. Модами с  $k_{\parallel} = 0$ , в частности, являются двумерные (в плоскости перпендикулярной к  $\mathbf{H}$ ) конвективные ячейки. Как и в обычной несжимаемой жидкости, они представляют собой движение аperiодического типа ( $\operatorname{Re} \omega = 0$ ). Следовательно, остается лишь мнимая часть, связанная с затуханием. При наличии диффузионного размешивания такое затухание равно  $\gamma_{\mathbf{k}} = k_y^2 D_{\perp}$ . Тогда (2.298) переходит в

$$D_{\perp} = \sum_{\mathbf{k}} (cE_{y\mathbf{k}}/H_0)^2 (1/k_y^2 D_{\perp}). \quad (2.299)$$

И в итоге для коэффициента аномальной диффузии получается иная, чем в (2.298), зависимость от амплитуды флуктуаций электрического поля:

$$D_{\perp} = \left( \sum_{\mathbf{k}} \frac{1}{k_y^2} c^2 E_{\mathbf{k}y}^2 / H^2 \right)^{1/2} \quad (2.300)$$

Самый трудный этап решения задачи об аномальном переносе частиц и тепла заключается в нахождении спектра турбулентности  $|E_{\mathbf{k}}|^2$ . Квазистационарный спектр пульсаций, который устанавливается после развития неустойчивости, — результат действия двух факторов: 1) вследствие неустойчивости энергия непрерывно накачивается в неустойчивые моды пульсаций; 2) из-за нелинейного взаимодействия между модами энергия передается по спектру в область затухания. Последний процесс для большинства микро-неустойчивостей плазмы не укладывается в рамки приближения слабой турбулентности. Приходится привлекать размеренные оценки, также как это делается обычно в теории гидродинамической турбулентности.

Коэффициент диффузии можно записать в виде

$$D \sim v_p^2 \tau. \quad (2.301)$$

Здесь  $v_p$  — пульсационная скорость плазмы;  $\tau$  — характерное время исчезновения корреляции. В данном случае  $\tau \approx 1/|\gamma|$ , поскольку здесь нет другого масштаба времени, характеризующего необратимость турбулентного режима. Амплитуду пульсаций определим из следующих соображений. С одной стороны, неустойчивость приводит к нарастанию амплитуды пульсаций  $\partial v_p / \partial t \sim \gamma v_p$ , с другой — нелинейные члены типа  $(v \nabla) v$  вызывают перекачку энергии в те части спектра, где флуктуации затухают. Из условия баланса между этими двумя процессами и определяется стационарное значение амплитуды пульсаций

$$|\gamma| v_p \approx (v_p / \lambda_{\perp}) v_p, \quad (2.302)$$

где  $\lambda_{\perp}$  — характерный размер турбулентных пульсаций поперек  $H$ .

Определяя из (2.302)  $v_p \approx |\gamma| \lambda_{\perp}$ , получим

$$D \approx |\gamma| \lambda_{\perp}^2. \quad (2.303)$$

Естественно в качестве  $\lambda_{\perp}$  взять длину волны неустойчивости.

Для максимального  $\lambda_{\perp} \sim [(1/n) (dn/dx)]^{-1}$  и инкремента  $\gamma \sim \omega_d$ , достигаемого при условии  $\omega_s \sim \omega_d$  (см. § 2.16), окончательно получим

$$D_{\perp} \approx c T_{*e} / 2\pi e H_0. \quad (2.304)$$

Коэффициент диффузии, принятый в гипотезе Бома, имеет такой же порядок величины. Нетрудно видеть, что при достаточно боль-

ших  $H_0$  получился бы меньший коэффициент диффузии. В самом деле, при неизменном  $k_y$  и ограниченном снизу  $k_z \geq 2\pi/L$  с ростом  $H_0$  значение  $\omega_s$  станет больше  $\omega_d$ .

Значение магнитного поля  $H^*$ , выше которого происходит указанное изменение режима турбулентной диффузии, можно оценить из условия  $\omega_s \geq \omega_d$  при  $k_y \sim 1/a$ ,  $k_z \sim 2\pi/L$ . В результате получаем

$$H^* \approx L^{2/3} c (m_i m_e \nu_e T_e)^{1/3} a^{-4/3} e^{-1}. \quad (2.305)$$

В высокотемпературной плазме с малой частотой соударений  $\nu_e$  практически всегда приходится иметь дело с гораздо большими полями, следовательно, диффузия из-за дрейфово-диссипативной неустойчивости не опасна.

## § 2.18. Энергетический баланс плазмы в токамаке

Если неустойчивости в плазме подавлены, длительность удержания частиц и энергии в магнитных ловушках определяется процессами диффузии и теплоотдачи. Изложим некоторые результаты теоретического анализа закономерностей, которым подчиняются эти процессы.

Для конкретности ограничимся случаем токамака, но в действительности выводы будут иметь более общий характер. Диффузионная скорость потока плазмы  $u_r$  направлена по малому радиусу, и, на первый взгляд, для ее определения можно воспользоваться формулой для прямолинейного плазменного шнура:  $u_r = -(c^2/\sigma_{\perp} H^*) dp/dr$  [ср. с формулой (2.171)].

Однако диффузия плазмы в токамаке содержит дополнительные слагаемые, играющие гораздо более важную роль. Отбросим не столь принципиальные дополнительные эффекты: сжатие плазменного шнура, обусловленное взаимодействием продольного тока с создаваемым им азимутальным полем, дрейфовое движение в вихревом электрическом поле, возникающем лишь при изменении продольного поля  $H_{\parallel}$ .

Ключевая роль принадлежит в рассматриваемом случае тороидальной поправке  $u_{\text{тор}}$ . В замкнутых системах дрейфовое движение частиц, вызванное тороидальной неоднородностью основного магнитного поля, должно было бы приводить к быстрому накоплению объемных зарядов (рис. 2.50).

Из-за наличия тороидальной компоненты магнитного поля ( $H_{\parallel}$ ), создаваемой в случае токамака током по плазме, эти заряды должны компенсироваться вследствие перетекания вдоль силовых линий. В результате возникает своеобразная перманентная циркуляция зарядов: тороидальный дрейф все время стремится их разделить, движение же по  $\phi$  со скоростью  $v_{\parallel} H_{\phi}/H$  возвращает из-

быток заряда обратно (см. рис. 2.50). Рассуждая так же как при выводе выражения для скорости диффузии плазмы поперек прямолинейного магнитного поля (см. § 2.9), нетрудно заключить, что появление новых токов приведет к дополнительной силе трения между электронами и ионами, а следовательно, и к дополнительному дрейфу под действием этой силы. Проведем нужные выкладки, пользуясь математическим языком магнитной гидродинамики. Условия равновесия по  $r$  и  $\varphi$  имеют вид

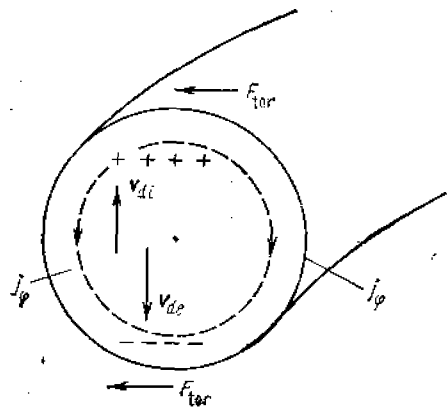


Рис. 2.50. Разделение зарядов из-за тороидального дрейфа и перетекание заряда в тороидальной ловушке

$$-\partial p / \partial r + (1/c) j_{\varphi} H_{\theta} - (1/c) j_{\theta} H_{\varphi} + F_{\text{tor}, r} = 0; \quad (2.306)$$

$$-(1/r) (\partial p / \partial \varphi) + F_{\text{tor}, \varphi} = 0. \quad (2.307)$$

В качестве простейшего заместителя тороидальной силы снова введем искусственную тяжесть  $F_{\text{tor}} = -\rho g$ , ориентированную, как показано на рис. 2.50, вдоль направления от внутреннего к внешнему обводу тора. Тогда

$$F_{\text{tor}, r} = \rho g \cos \varphi; \quad F_{\text{tor}, \varphi} = -\rho g \sin \varphi.$$

Считая, что в целом тороидальная поправка к равновесным параметрам плазмы  $p(r)$  и  $\rho(r)$  мала (т. е. выполнено условие  $r/R \ll 1$ ), из уравнения (2.307) находим

$$\rho = \rho_0(r) + r \rho_0'(r) g \cos \varphi. \quad (2.308)$$

Теперь это выражение нужно подставить в (2.306). Нетрудно видеть, что получится уравнение, в котором некоторые члены вовсе не зависят от угла  $\varphi$ , а другие члены пропорциональны  $\cos \varphi$ . Приравняв эти части нулю по отдельности, получим

$$-dp_0/dr + (1/c) j_{\varphi} H_{\theta} = 0$$

(обычное условие равновесия плазмы с прямыми силовыми линиями, в данном случае играющее роль нулевого приближения);

$$-r (d\rho_0/dr) g \cos \varphi + (1/c) j_{\theta} H_{\varphi} = 0. \quad (2.309)$$

Это уравнение как раз и дает выражение для тока вдоль силовых линий, компенсирующего разделение зарядов из-за тороидального дрейфа, вызываемого силой  $F_{\text{tor}}$ .



Скорость результирующего дрейфового движения  $u_r^*$  плазмы под действием обусловленной током  $j_\theta$  силы трения ( $F_\theta = j_\theta / en r_{ei}$ ) получаем из закона Ома

$$j_\theta = \sigma_{||} u_r^* / c H_\varphi. \quad (2.310)$$

Итак, из (2.309) и (2.310) получаем

$$u_r^* = -c^2 r (dp_o / dr) g \cos \varphi / \sigma_{||} H_\varphi^2, \quad (2.311)$$

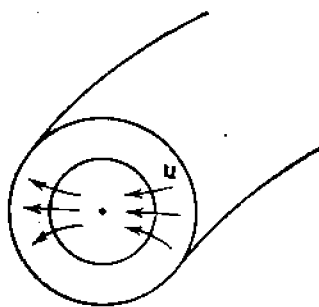


Рис. 2.51. Диффузионная конвекция плазмы в токамаке вследствие конечной проводимости

т. е. тороидальная поправка к диффузионному растеканию плазмы оказывается знакопеременной по углу  $\varphi$ . Картина такого растекания скорее напоминает своеобразную диффузионную конвекцию (рис. 2.51). Но если определить средний поток плазмы по углу  $\varphi$ , то он оказывается отличным от нуля и направлен наружу. Действительно, интеграл от потока частиц по углу  $\varphi$  дает

$$\int_0^{2\pi} n u, d\varphi = \int_0^{2\pi} n_o(r) u, d\varphi + \int_0^{2\pi} \delta n(r, \varphi) u, d\varphi.$$

Первый член в правой части обращается в нуль. Чтобы найти  $\delta n(r, \varphi)$  — тороидальную поправку к плотности плазмы, будем считать, что температура плазмы однородна вдоль магнитной поверхности, т. е.  $\delta n \sim \delta p$ . С учетом этого из (2.308) находим

$$\delta n = (n_o / p_o) \delta p = \frac{n_o}{p_o} r p_o(r) g \cos \varphi.$$

Тогда

$$\int_0^{2\pi} \delta n u_r^* d\varphi = -(\pi r^2 c^2 (dp_o / dr) g^2 p_o / \sigma_{||} H_\varphi^2) (n_o / p_o) \quad (2.312)$$

Если ввести  $\bar{u}_r$  — усредненное значение диффузионной скорости, разделив (2.312) на  $2\pi n_o(r)$ , то для  $\bar{u}_r$  получим

$$\bar{u}_r^* = -(r^2 / 2) (c^2 (dp_o / dr) g^2 p_o / \sigma_{||} H_\varphi^2 p_o). \quad (2.312a)$$

Возвращаясь к настоящей тороидальности, в частности к силе  $2p/R$  вместо искусственной тяжести  $rg$ , для усредненной скорости  $u_{\text{тор}}$  получаем

$$u_{\text{тор}} = -(2c^2 / \sigma_{||}) (r^2 / R^2) (1 / H_\varphi^2) (dp_o / dr). \quad (2.313)$$

Сумму  $u_r$  и  $u_{\text{тор}}$  можно рассматривать как эффективную диффузионную скорость радиального потока плазмы в тороидальной ловушке. В этом случае имеем

$$u_{\perp} = u_r + u_{\text{тор}} = -\frac{c^2}{\sigma_{\perp} H^2} \left( 1 + \frac{2\sigma_{\perp}}{\sigma_{\parallel}} g^2 \right) \frac{dp_0}{dr}. \quad (2.314)$$

Параметр  $q = (r/R) (H_0/H_{\varphi})$  часто называют «коэффициентом запаса устойчивости» (по отношению к винтовым возмущениям). В условиях экспериментов на установках токамак при  $r=a$  он обычно лежит в пределах от 3 до 5. Величина  $q$  связана с углом вращения силовых линий соотношением  $q = 2\pi/\Omega$ . Формула (2.314) эквивалентна следующему соотношению между эффективным значением суммарного коэффициента диффузии и обычным коэффициентом диффузии  $D_{\perp}^0$  соответствующим магнитному полю с прямыми силовыми линиями (см. (2.171)):

$$D_{P,S} = D_{\perp}^0 (1 + (2\sigma_{\perp}/\sigma_{\parallel}) q^2). \quad (2.315)$$

Если в нем выразить  $q$  через  $\Omega$ , то получается формула, справедливая также и для систем типа стеллараторов:

$$D_{P,S} = D_{\perp}^0 (1 + 8\pi^2 \sigma_{\perp} / \Omega^2 \sigma_{\parallel}). \quad (2.315a)$$

Эту формулу часто называют формулой Пфирша — Шлютера. Второй член, характеризующий здесь тороидальную поправку к коэффициенту диффузии для устойчивой плазмы, относительно велик (на установках токамак отношение  $D_{P,S}/D_{\perp}^0$  должно было бы составлять 10—20). Но даже с учетом этой поправки скорость диффузии оказывается небольшой. Однако практически в существующих экспериментальных установках не удается получить плазму, в которой все виды неустойчивости подавлены. Поэтому коэффициент поперечной диффузии во много раз (на несколько порядков) превышает значение коэффициента, вычисляемого согласно Пфиршу и Шлютеру.

Однако нужно иметь в виду, что указанное выражение (2.315) для  $D_{\perp}$  справедливо лишь в том случае, если плазма имеет достаточно высокую концентрацию, и поэтому при вычислении скорости потока частиц можно пользоваться магнитогидродинамическим приближением. Для этого необходимо, чтобы в каждом элементе объема распределение частиц по скоростям было полностью изотропным.

В плазме с низкой концентрацией и высокой температурой влияние тороидальности на процессы переноса может быть более сильным, чем указывалось выше. Это объясняется той ролью, которую в таких процессах играют частицы, запертые в ограниченных участках силовых линий между областями сильного поля.

При низкой концентрации такие частицы образуют в системе как бы отдельный статистический ансамбль. Очевидно, что о существовании отдельной группы запертых частиц можно говорить в том случае, если за время колебания одной такой частицы между точками отражения вероятность ее перехода из «запертого» состояния в «пролетное» мала.

Очень грубую оценку коэффициента поперечной диффузии  $D'_{\perp}$  для запертых частиц можно получить при помощи соотношения

$$D'_{\perp} \sim (\Delta r)^2 / \tau_1, \quad (2.316)$$

где  $\Delta r$  — смещение частицы в направлении, перпендикулярном к  $H$ , за промежуток времени  $\tau_1$ . Примем  $\Delta r$  по порядку величины равным полуширине «банана» — серповидного сечения траектории запертой частицы. Для того чтобы частица сместилась на расстояние  $\Delta r$ , ее скорость должна повернуться на угол порядка  $\sqrt{a/R}$  (так как для запертых частиц угол  $v_{\perp}/v$ , составляемый направлением скорости с плоскостью, перпендикулярной к  $H$ , имеет порядок величины  $\sqrt{a/R}$ , и при изменении этого угла соответственно изменяется ширина серповидного сечения).

Поскольку кулоновские столкновения носят характер многократного рассеяния, при котором суммарный угол поворота скорости  $\Delta\alpha$  статистически складывается из малых отклонений, то время  $\tau_1$  можно определить при помощи соотношения  $\tau_1 \sim \tau (\Delta\alpha)^2 \sim \tau a/R$ , где  $\tau$  — время между двумя соударениями электрона с ионами.

Подставляя в (2.316) выражения для  $\Delta r$  и  $\tau_1$ , находим

$$D'_{\perp} \sim (r_{He}^2 / \tau) (H^2_{\theta} / H^2_{\varphi}), \quad (2.317)$$

где  $r_{He}$  — ларморовский радиус электронов.

Отношение концентрации запертых частиц к концентрации всех частиц в плазме порядка  $\sqrt{a/R}$ . Поэтому эффективный коэффициент диффузии плазмы должен быть порядка  $D'_{\perp} \sqrt{a/R}$ . Окончательно, с учетом численного множителя, для получения которого потребовалось бы воспроизвести громоздкие вычисления так называемой неоклассической теории переноса, коэффициент диффузии равен

$$D_{G.S.} = 3.6 \sqrt{a/R} (r_{He}^2 / \tau) (H^2_{\theta} / H^2_{\varphi}). \quad (2.318)$$

Эта величина превышает тороидальную поправку в формуле (2.315) в отношении  $(R/r)^{3/2}$ , т. е. для существующих установок по меньшей мере в несколько десятков раз. Таким образом, оказывается, что при чисто классическом (ламинарном) рассмотрении эффект тороидальности может увеличить диффузионный поток в плазме низкой плотности в 1000 и более раз.

Проведем наглядное сопоставление скоростей диффузии в двух рассмотренных предельных случаях: магнитогидродинамическом и так называемом банановом — построим условный график зависимости коэффициента диффузии от частоты столкновений  $\nu_e = 1/\tau_e$  (рис. 2.52). Условность такого представления очевидна хотя бы из того, что в действительности выражения (2.315) и (2.318) для коэффициентов диффузии содержат прямую зависимость коэффициента от температуры помимо зависимости  $\nu_e$  от температуры. В обоих предельных случаях ход  $D(\nu_e)$  изображается прямыми. Наклон  $D_{G.S}(\nu_e)$  (в банановом режиме) в  $3,6(R/a)^{3/2}$  раза больше. Этот режим реализуется при

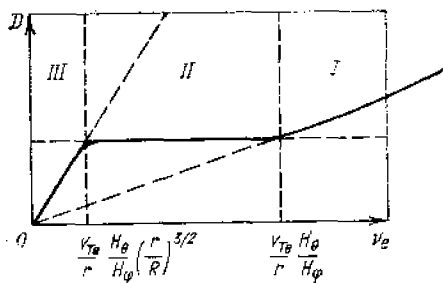


Рис. 2.52. Зависимость коэффициента диффузии плазмы от частоты соударений:

I — магнитогидродинамический режим; II — область плато; III — банановый режим

$$\nu_e < (r/R)^{3/2} (H_{\phi}/H_{\theta}) (\nu_{Te}/r).$$

Если это условие не выполнено, то запертые электроны не успевают описать бананообразную траекторию. Да и само разделение электронов на запертые и пролетные теряет смысл.

Магнитогидродинамический предел, в свою очередь, накладывает ограничение на частоту столкновений  $\nu_e$  снизу. Для применимости гидродинамического приближения необходимо, чтобы длина свободного пробега была существенно меньше характерного пространственного размера. Для продольного (вдоль  $H$ ) движения электронов в качестве такого размера следует выбрать  $rH_{\theta}/H_{\phi}$  — среднее расстояние вдоль силовой линии между областями с максимумом и минимумом поля в тороидальном витке. Следовательно, в режиме частых столкновений

$$\nu_e > (H_{\phi}/H_{\theta}) (\nu_{Te}/r).$$

Видим, что рассмотренные пределы банановой и магнитогидродинамической диффузий разделены на рис. 2.47 областью, где частота столкновений лежит в интервале

$$(\nu_{Te}/r) (H_{\phi}/H_{\theta}) (r/R)^{3/2} < \nu_e < (\nu_{Te}/r) (H_{\phi}/H_{\theta}). \quad (2.319)$$

Практически это довольно широкий интервал, так как  $(R/r)^{3/2} \gg 1$ .

Как же ведет себя коэффициент диффузии в этой промежуточной области? Ответ на этот вопрос следует из «неоклассической» теории диффузии: в интервале (2.319) практически исчезает зависимость от частоты столкновений. Можно сказать, что этот ответ является наиболее неожиданным результатом «неоклассической» теории. Физический смысл этого результата становится более

понятным, если воспользоваться аналогией с затуханием Ландау. Неоднородная часть тороидального магнитного поля магнитной ловушки как бы играет роль поля волны (в данном случае следовало бы назвать ее магнитостатической). Запертые частицы вполне аналогичны резонансным частицам в механизме затухания по Ландау. А вместо силы трения  $F_g = j_g/nec_{el}$  выступает сила трения электронов о магнитостатическую волну, как бы играющую роль посредника между электронами и ионами. Эта аналогия существенно упрощает выкладки.

Итак, тороидальное магнитное поле  $H_g = H_0 [1 - (r/R) \cos \varphi]$ . Неоднородная добавка  $\delta H = -H_0 (r/R) \cos \varphi$ , как уже говорилось, имитирует поле волны. Вызываемая ею поправка  $f_1$  к искомой функции распределения «резонансных» (запертых) электронов удовлетворяет линеаризованному кинетическому уравнению

$$v_{\parallel} (H_{\varphi}/H_0) (1/r) (\partial f_1/\partial \varphi) - (\mu/m) (\text{grad } \delta H)_{\parallel} (\partial f_0/\partial v_{\parallel}) + (c/eH_0) \mu (\text{grad } \delta H)_{\varphi} (\partial f_0/\partial r) = -\nu_e f_1. \quad (2.320)$$

Здесь индексы  $\parallel$  и  $\varphi$  означают выбор компонент  $\text{grad } \delta H$  вдоль силовой линии и по  $\varphi$  соответственно. Второе слагаемое в (2.320) конкретизирует член  $-(\mu/m) \text{grad } H (\partial f/\partial v)$ , а третье слагаемое описывает влияние дрейфа резонансных частиц в неоднородном магнитном поле. Отсутствие традиционного члена  $-i\omega f_1$  означает, что резонансными являются частицы с  $v_{\parallel} \approx 0$ , как и следовало ожидать. Учитывая, что

$$(\text{grad } \delta H)_{\parallel} = -(H_0/R) \sin \varphi (H_{\varphi}/H_0);$$

$$(\text{grad } \delta H)_{\varphi} = (H_0/R) \sin \varphi,$$

после несложных выкладок, напоминающих вычисления в § 2.7 [см. вывод формулы (2.108)], находим решение уравнения (2.320):

$$f_1 = - \sum_{\pm} \frac{\mu}{2m_e} \frac{H_0}{R} \left[ \frac{H_{\varphi}}{H_0} \frac{\partial f_0}{\partial v_{\parallel}} + \frac{1}{\omega_{He}} \frac{\partial f_0}{\partial r} \right] \frac{\exp(\pm i\varphi)}{(1/r) (H_{\varphi}/H_0) v_{\parallel} \pm iv_e}. \quad (2.321)$$

Далее по аналогии с тем, как в теории затухания Ландау вычислялась работа поля волны над резонансными частицами  $\langle \mathbf{j} \cdot \mathbf{E} \rangle$ , найдем радиальный поток резонансных частиц из-за тороидального дрейфа  $\langle nu_r \rangle$ :

$$\langle nu_r \rangle = \int \frac{\mu H_0 \sin \varphi}{m_e \omega_{He} R} f_1 d\mu d\varphi dv_{\parallel}. \quad (2.322)$$

В этом выражении интегрирование по  $d\mu$  и  $dv_{\parallel}$  заменяет интегрирование по пространству скоростей. Так как знак дрейфа яв-

ляется знакопеременным по углу  $\varphi$ , то мы усреднили это выражение также по всем углам  $\varphi$ . При вычислении интеграла по  $v_{\parallel}$  следует учесть, что

$$\text{Im} \frac{1}{(H_{\varphi}/H_0) v_{\parallel}/r \mp i\nu} = \pm \frac{\pi H_0}{H_{\varphi}} \delta(v_{\parallel})$$

(при  $\nu \rightarrow 0$ , рассуждая так же, как и при вычислении резонансного полувычета, соответствующего затуханию Ландау). В конце концов, несложные выкладки с учетом (2.321) и (2.322) для равновесной функции распределения вида  $f_0 = n(r) f_M$  ( $f_M$  — максвелловское распределение) дают

$$\overline{nu}_r = -\sqrt{\pi/2} (rr_{He}/R^2) (cT_e/eH_{\varphi}) (dn/dr).$$

Таким образом, для коэффициента диффузии в промежуточной области частот столкновений (ее принято называть областью неоклассического плато — см. рис. 2.52) имеем

$$D_{\perp}^p = \sqrt{\pi/2} (rr_{He}/R^2) (cT_e/eH_{\varphi}). \quad (2.323)$$

Зависимостью аналогичной той, которая изображена на рис. 2.52 для  $D_{\perp}(v_e)$ , обладает и коэффициент температуропроводности, поскольку перенос тепла поперек магнитного поля в тороидальном витке определяется такими же дрейфовыми движениями частиц, прерываемыми время от времени столкновениями. Особенно важную роль должна играть ионная температуропроводность из-за большого элементарного шага перескоков ионов. Ведь толщина ионных «бананов» в  $r_{Hi}/r_{He}$  раз больше. Опуская выкладки, аналогичные только что сделанным, приведем коэффициент температуропроводности ионов в режиме плато:

$$\chi_{\perp i}^p = (3/2) \sqrt{\pi} (rr_{Hi}/R^2) (cT_i/eH_{\varphi}). \quad (2.324)$$

Отсюда видно, что скорость теплоотвода в режиме плато растет с температурой ионов как  $T_i^{3/2}$ . Чем сильнее нагреваются ионы, тем больше они отдают тепло в результате теплопроводности. Поэтому в течение длительного времени рост температуры ионов существенно отстал от роста мощности нагрева в современных лабораторных установках.

В банановом режиме согласно неоклассической теории переноса ионная температуропроводность

$$\chi_{\perp i} = 0,4 \sqrt{r/R} (r_{Hi}^2/\tau_i) (H_e^2/H_{\varphi}^2). \quad (2.325)$$

Скорость теплоотвода с ростом температуры в этом режиме должна падать как  $T_i^{-1/2}$ .

Однако выйти в банановый режим оказалось не так-то просто. Входящая в условие

$$v_i < (v_{Ti}/r) (H_{\varphi}/H_0) (r/R)^{3/2} \quad (2.326)$$

частота столкновений ионов водородной плазмы в реальных условиях эксперимента, по-видимому, увеличена из-за столкновений с многозарядными ионами примесей. Во всяком случае, в настоящее время режим плато в токамаках преобладает.

Процесс изменения режима «неоклассического» переноса с ростом температуры удобно проследить с помощью семейства зависимостей  $\chi_{\perp i}(n)$ , соответствующих различным температурам (рис. 2.53). Каждая из изображенных кривых ведет себя аналогично  $\chi_{\perp i}(v_i)$  при фиксированной температуре. В области плато  $\chi_{\perp i}$  тем больше, чем больше  $T$ . Однако границы этой области для разных кривых не совпадают. С ростом температуры  $v_i$  должна падать, и в конце концов нагрев плазмы при  $n = \text{const}$  должен привести к «банановому» режиму.

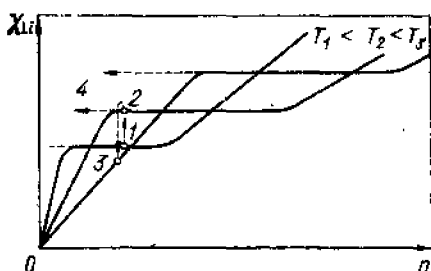


Рис. 2.53. Семейство зависимостей  $\chi_{\perp i}(n)$  (аналогично ведет себя и коэффициент диффузии) при трех фиксированных значениях температуры согласно «неоклассической» теории. Изменение режима переноса тепла при нагреве показано стрелкой (1→2→3). При достаточно большой температуре режим плато сменяется банановым режимом. Наличие примесей с большим зарядом может затянуть режим плато. Смещение границ плато при увеличении концентрации примеси показано стрелками (4)

На рисунке стрелками показана последовательность смены режимов теплоотвода; рост  $\chi_{\perp i}(T)$  в области плато сменяется падением в банановом режиме. Пунктиром показано изменение зависимости  $\chi_{\perp i}(n)$  как результат увеличения  $v_i$  (при наличии примесей).

В условиях джоулевого нагрева плазмы при протекании по ней тока  $J_{\theta}$ , создающего полоидальное поле  $H_{\phi}$ , температура электронов, как правило, оказывается значительно выше ионной. Баланс тепла в ионной компоненте является следствием конкуренции между передачей энергии ионам при их столкновениях с электронами и «неоклассическим» теплоотводом. Так называемый скейлинг (зависимость от основных параметров) для ионной температуры в этом случае несложно установить, рассуждая следующим образом. Передача тепла от электронов ионам пропорциональна  $n(T_e - T_i)/T_e^{3/2}$  [см. формулу (1.17a)]. Потерю тепла ионами оценим, считая, что по порядку величины в уравнении теплопроводности  $\Delta T_i \sim T_i/r^2$ . Тогда  $nT_i/\tau \sim n\chi_{\perp i}(T_i/r^2)$ . Из условия баланса тепла имеем соотношение пропорциональности

$$n(T_e - T_i)/T_e^{3/2} \sim \chi_{\perp i}(T_i/r^2). \quad (2.327)$$

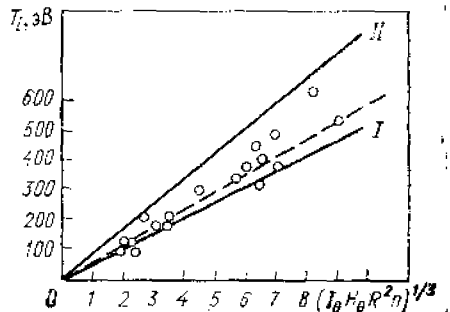
Для отношения  $(T_e - T_i)/T_e^{3/2}$  удобна интерполяция  $(T_e - T_i)/T_e^{3/2} \cong 0,33\sqrt{T_i}$ , освобождающая от  $T_e$ . В интервале изменения параметра  $T_e/T_i$  от 1,6 до 10 погрешность такой интерполяции не больше 15%. Это вполне допустимо для экспериментов на токамаках. Теперь, подставляя  $\chi_{Li}$  в соответствии с формулой (2.324), из (2.327) нетрудно найти, что температура ионов подчиняется скейлингу\*

$$T_i \sim (I_0 H_0 R^2 n)^{1/3}. \quad (2.328)$$

При выводе (2.328) полоидальное поле  $H_\phi$  выражено через ток  $I_0$  с помощью очевидного соотношения  $H_\phi \approx cI_0/r$ . Удивительно, насколько хорошо результаты измерения ионной температуры в то-

Рис. 2.54. Экспериментальные результаты исследования зависимости ионной температуры в токамаке от силы тока и амплитуды магнитного поля.

Прямые I и II соответствуют изменению ионной температуры, вычисленному на основе «неоклассической» теории при двух различных предположениях о радиальном распределении токов и плотности. Прямая I соответствует однородному распределению плотности и тока, прямая II — случаю  $n \sim (1-r^2/a^2)$ ,  $j_\theta \sim (1-r^2/a^2)$ . Точки — результаты эксперимента



камаках с омическим нагревом укладываются в рамки такого скейлинга (рис. 2.54).

Процессы установления баланса тепла по электронной компоненте оказалось невозможным объяснить на основе «неоклассической» теории: слишком уж мала вытекающая из нее теплопроводность плазмы (в  $\tau_{Ni}/\tau_{Ne}$  раз меньше ионной). Поэтому даже слабые остаточные неустойчивости (скорее всего из семейства дрейфовых) вызывают дополнительную утечку тепловых электронов.

Для прямого одноступенчатого нагрева ионов можно использовать энергию пучков быстрых ионов, инжектируемых извне в плазму (первоначально в виде пучков нейтральных, быстро теряющих связанный электрон, атомов тяжелого водорода). Надо только убедиться, что энергия этого пучка не будет перехватываться электронами.

Если тепловая скорость электронов значительно превышает тепловую скорость ионов, то формула (1.17а) остается справедливой также и при  $T_i \gg T_e$ , т. е. в том случае, когда происходит нагрев электронов более горячей ионной компонентой. Перепишем

\* Это соотношение сейчас широко известно под названием «формула Арциевича». — Прим. Р. З. Сагдеева.



для этого случая указанную формулу в виде

$$Q_{ie} = (1,2 \cdot 10^{-17}/A) n (T_i - T_e)/T_e^{3/2}, \quad (2.329)$$

где  $Q_{ie}$  — энергия, передаваемая от ионов к электронам в единице объема за 1 сек. Однако если в плазме с холодными электронами постоянно присутствуют горячие ионы, так что  $v_{Ti} \gg v_{Te}$ , то скорость теплообмена может значительно возрасти. Рассуждая так же, как и при выводе формулы (2.329), мы при указанном условии приходим к следующей формуле теплопередачи:

$$Q_{ie} = 2,2 \cdot 10^{-14} n / \sqrt{T_i}, \quad (2.330)$$

Из сравнения формул (2.329) и (2.330) вытекает интересное следствие, демонстрирующее одно из специфических свойств высокотемпературной плазмы. Предположим, что через плазму проходит быстрая тяжелая заряженная частица с энергией в интервале от  $10^5$  до  $10^6$  эВ. Основные потери энергии у такой частицы будут обусловлены столкновениями с электронами плазмы, и именно этот физический механизм должен определять длину пробега быстрой частицы в плазме. Если движение происходит в водородной плазме и при этом скорость частицы  $v_{Ti} \gg v_{Te}$ , то для грубой оценки торможения частицы можно пользоваться формулой (2.330), полагая  $T_i = (2/3)\omega$ , где  $\omega$  — энергия частицы. При этом, как показывают аналогичные подсчеты, потери энергии частицы на единицу массы пройденного вещества в плазме будут того же порядка, что и в нейтральной среде. Однако положение существенно изменится, если заставить частицу проходить через плазму с достаточно высокой электронной температурой. Если даже  $T_e \ll (2/3)\omega$ , но  $v_{Te} \gg v_{Ti}$ , то потери энергии значительно уменьшаются и будут определяться формулой

$$Q_{ie} \approx (1,2 \cdot 10^{-17}/A) n (T_i/T_e^{3/2}). \quad (2.331)$$

Здесь  $Q_{ie}$  — энергия, теряемая частицей за 1 сек;  $A$  — масса частицы (для протона  $A=1$ ). Уменьшение  $Q$  означает соответствующее увеличение пробега частицы. Если на своем пути в плазме частица может генерировать ядерные реакции, то общий выход реакций во много раз возрастет при увеличении электронной температуры (если, конечно, нам удастся заставить быструю частицу пробыть в плазме достаточно долгое время).

Рассмотрим интересный пример, принадлежащий одному из авторов (Л. А. Арцимовичу). Пусть пучок быстрых дейтронов проходит через тритиевую плазму. Если температура плазмы невелика, то выход реакций будет очень мал. При  $\omega \approx 100$  кэВ вероятность того, что частица испытает в плазме с близкой к нулю температурой на полной длине своего пробега одно ядерное столкновение, составляет  $2 \cdot 10^{-6}$ . Энергетический КПД, т. е. отношение освобождаемой ядерной энергии к начальной энергии дейтронов, близок к 0,04%. Вероятность и энергетический КПД реакций

Вопросы, касающиеся  
исследования  
и т.д.

Вопросы, касающиеся  
исследования  
и т.д.

Вопросы, касающиеся  
исследования  
и т.д.

Последние (факсимиле) страницы рукописи академика Л. А. Арци

быстро возрастают с увеличением  $T_e$  и при  $T_e \approx 6 \cdot 10^3$  эВ КПД приближается к единице, а при  $T_e \approx 10^4$  эВ значительно ее превосходит. Таким образом, в принципе появляется возможность энергетического использования реакций  $D+T \rightarrow He+n$  в режиме прохождения потока быстрых заряженных частиц через плазму с достаточно высокой электронной температурой. В 1961 г., когда были проведены эти оценки, такая перспектива казалась практически маловероятной. Однако в настоящее время появилась возможность инжектирования быстрых ионов в «магнитные ловушки» с большим временем жизни заряженных частиц (например в токамаки). По отношению к такому пучку горячая плазма может служить эффективной «ядерной мишенью». В результате плазмы оказываются двух сортов: тепловые и быстрые. Этот вариант токамака называют «двухкомпонентным». Все же, по-видимому, более важное значение будет иметь использование такого метода инжекции для простого повышения ионной температуры плазмы. Особенно успешным оказалось применение такого метода нагрева на токамаке PLT в Принстоне (рис. 2.55).

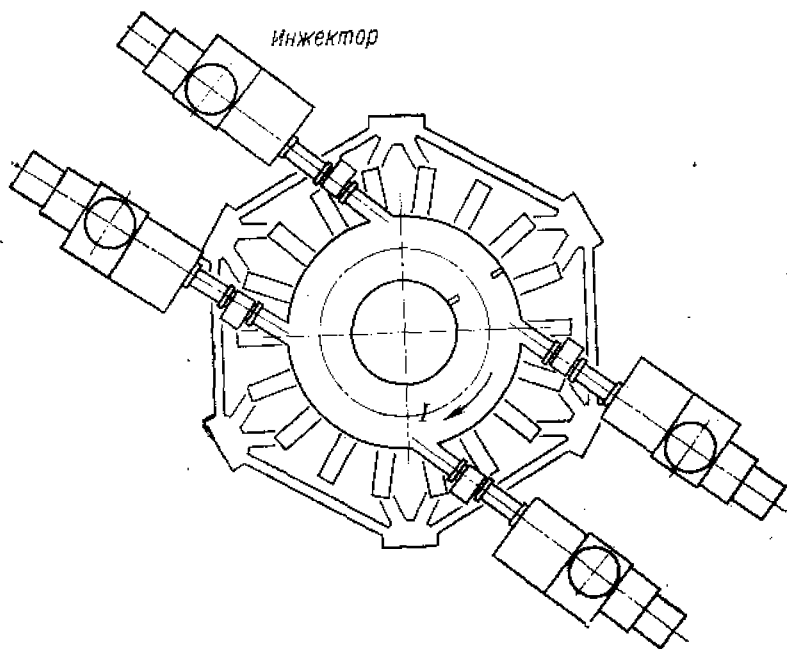


Рис. 2.55. Принципиальная схема, показывающая расположение инжекторов нейтральных частиц вдоль большого периметра токамака PLT в Принстонской плазменной лаборатории.

При суммарной мощности инжекции  $P \sim 2,5$  МВт в плазме с плотностью  $n \sim 5 \cdot 10^{23}$  см<sup>-3</sup> (в центре) была получена температура ионов  $T_e \sim 5,5$  кэВ. При этом ионы оказались в банановом режиме с коэффициентом теплопроводности в несколько раз меньше, чем по скейлингу для «плато». (Препринт PPL-783851, Принстонская плазменная лаборатория, 1978.)

В энергетическом балансе плазмы, запертой в магнитной ловушке, при некоторых условиях заметная роль может принадлежать так называемому магнитному или бетатронному излучению, связанному с ларморовским вращением электронов. Для электрона, движущегося в магнитном поле  $H$  по винтовой линии с центростремительным ускорением  $v_{\perp}^2/r_{He}$ , энергия, излучаемая в единицу времени, определяется выражением

$$dW/dt = (2/3) r_0^2 (1 + \omega_e/m_0c^2)^2 (v_{\perp}^2/c) H^2, \quad (2.332)$$

где  $r_0$  — классический радиус электрона;  $\omega_e$  — кинетическая энергия электрона (в интересующих нас случаях  $\omega_e \ll m_0c^2$ ).

Спектр излучения для отдельного электрона линейчатый. Он состоит из основной линии с ларморовской частотой  $\omega_{He}$  и ее гармоник. Вследствие эффекта Доплера с учетом релятивизма частота  $\omega_n$   $n$ -й гармоники оказывается зависящей от компонент скорости частицы  $v_{\parallel}$  и  $v_{\perp}$  и угла  $\theta$ , под которым наблюдается излучение и направление магнитного поля:

$$\omega_n = n\omega_H \sqrt{1 - v^2/c^2} / \{1 - (v_{\parallel}/c) \cos \theta\}.$$

Если энергия электрона достаточно мала по сравнению с  $m_0c^2$ , то главная часть излучаемой энергии должна приходиться на основную частоту. С ростом  $\omega_e$  доля высших гармоник в общей интенсивности излучения быстро увеличивается. Если предположить, что вся излучаемая энергия уходит из плазмы, то потери энергии на магнитное излучение в плазме превосходили бы выделение энергии, обусловленное термоядерными реакциями в магнитных ловушках. Следовательно, если бы магнитное излучение могло свободно выходить из плазмы, оно представляло бы одно из главных препятствий для сооружения термоядерного реактора с положительным энергетическим балансом. Однако в действительности большая часть магнитного излучения, которая относится к основной частоте и первым гармоникам, поглощается, не выходя из плазмы, и только излучение, принадлежащее сравнительно слабым высшим гармоникам, выходит через границу плазмы без существенного ослабления.

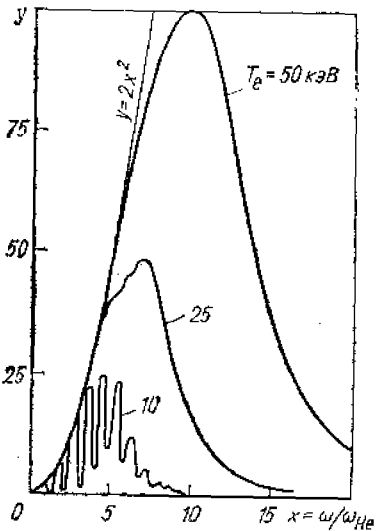


Рис. 2.56. Спектр магнитотормозного излучения, выходящего из плазмы

Упрощенно излучение, в конце концов выходящее из плазмы, можно представить себе как суперпозицию равновесного излучения (по Рэлею — Джинсу) при малых частотах  $n < n^*$  (здесь  $n$  — номер гармоники), где важен эффект перепоглощения, и высокочастотной доли излучения электронов плазмы  $n > n^*$ , практически свободно покидающей плазму. Оценку  $n^*$  можно сделать, считая, что при  $n = n^*$  обе ветви спектральной интенсивности излучения (Рэлея — Джинса и прямого излучения электронами) сравниваются по порядку величины.

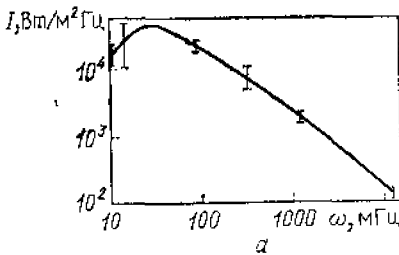
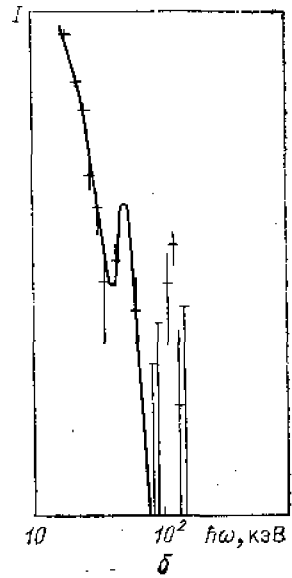


Рис. 2.57. Магнитотормозное излучение релятивистских электронов в межзвездном магнитном поле является главным источником наблюдаемого радиоизлучения нашей Галактики и других галактик, радиогалактик, а также остатков вспышек сверхновых и квазаров.

Здесь приведен спектр радиоизлучения радиогалактики Лебедь А. Радиосветимость около  $10^{46}$  эрг/с (6). Спектральная деталь вблизи  $h\nu = 56$  кэВ в спектре рентгеновского излучения пульсара HerX-1, обнаруженная при рентгеновских наблюдениях с баллона (Trumpen J. e. a. «Astrophys. J. Lett», 1978, v. 219, p. 105. Максимум при 56 кэВ интерпретируется как излучение горячей плазмы на циклотронной частоте и соответствует напряженности магнитного поля  $5 \cdot 10^{12}$  Гс (6)



Представление о результатах, полученных в строгой теории переноса излучения, может дать рис. 2.56, на котором изображено спектральное распределение интенсивности магнитного излучения, выходящего из плоского слоя плазмы, для случая  $8\pi l T / H^2 = 1$ . По оси абсцисс отложена частота в единицах  $\omega_{He}$ , а по оси ординат — распределение интенсивностей по спектру. Масштаб по оси ординат выбирается таким образом, чтобы спектр черного тела в области низких частот (т. е. там, где он соответствует закону Рэлея — Джинса) изображался параболой  $y = 2x^2$ .

Так как вследствие поглощения спектр излучения плазмы должен зависеть от толщины излучающего слоя, ее удобно выражать в безразмерных единицах. Безразмерная толщина слоя  $a_0$  определяется соотношением  $a_0 = (4\pi l_0 e / H) a$ , где  $a$  — толщина слоя в сантиметрах. Графики, приведенные на рис. 2.56, построены для случая, когда  $a_0 = 10^4$ . Различные кривые изображают спектр магнитного излучения, соответствующий разным значениям температуры плазмы. Если при не слишком высоких  $T_e$  на спектральной

кривой ясно видны отдельные гармоники, то при более высоких температурах кривые имеют форму, характерную для сплошного спектра.

Из-за эффекта Доплера при высоких температурах отдельные линии, принадлежащие к высоким гармоникам, сливаются друг с другом.

В предельном случае сверхсильных магнитных полей (имеющих смысл для астрофизических приложений), магнитотормозное излучение смещается в рентгеновскую часть спектра. На рис. 2.57,6 изображен спектр такого излучения от нейтронной звезды *Her-X*.

### § 2.19. Аномальное сопротивление в плазме и образование двойных слоев

Среди большого разнообразия неустойчивостей плазмы имеет смысл отдельно выделить те, которые не зависят или почти не зависят от специфики краевой задачи, будь то конкретная геометрия лабораторной плазменной установки, тип равновесной конфигурации плазмы или формы ее течения. Одним из важнейших классов таких неустойчивостей, безусловно, следует считать неустойчивости плазмы с током, плотность которого превышает определенное критическое значение.

Самым распространенным примером является ионно-звуковая неустойчивость (см. § 1.12). Если причиной, вызывающей неустойчивость, является превышение некоторого критического значения тока, то из общих соображений ясно, что рост такой неустойчивости должен автоматически привести к механизму, ограничивающему рост тока. Иначе говоря, должно появиться дополнительное электрическое сопротивление — так называемое аномальное.

Итак, пусть электронная функция распределения имеет некоторую скорость  $u_0$  относительно ионной функции распределения,

Таблица 2.2

Неустойчивости плазмы с электрическим током, относящиеся к проблеме аномального сопротивления

Тип неустойчивости	Порог неустойчивости	Частота	Инкремент возрастания
Неустойчивость Бунемана	$u_0 \gtrsim v_{Te}$	$\sim \omega_{pi}$	$\sim \omega_{pi}$
Ионно-звуковая	$u_0 > (T_e/m_i)^{1/2}$	$\lesssim \omega_{pi}$	$\lesssim \omega_{pi} u_0 / v_{Te}$
Электростатические моды $k_{\perp}^2 \gg k_z^2$	Очень низкий, иногда $< v_{Ti}$	$\ll \omega_{He}$	$\sqrt{\omega_{He} \omega_{Hi}}$
Неустойчивости на гармониках циклотронной частоты		$i\omega_H$	$\omega_H u / v_{Te}$

превышающую критическое значение для возникновения неустойчивости. Вследствие такой неустойчивости электроны в дополнение к обычной потере импульса из-за парных столкновений теряют еще часть его с излучением колебаний и волн различного типа. Рассмотрим таблицу неустойчивостей такого типа, возникающих при превышении критического значения скорости. В табл. 2.2 перечислены основные неустойчивости, имеющие отношение к проблеме аномального сопротивления в плазме. Простейшая неустойчивость — это неустойчивость Бунемана (см. § 1.12). Исходные функции распределения электронов и ионов в этом случае имеют вид двух  $\delta$ -функций, сдвинутых друг относительно друга на величину средней скорости  $u_0$ . Неустойчивость представляет собой раскачку продольных электростатических колебаний плазмы со скоростью нарастания порядка плазменной ионной частоты.

Другой пример неустойчивости, которую практически можно считать модой того же типа, — это уже упоминавшаяся неустойчивость ионно-звукового типа. Эти колебания возникают при дрейфовых скоростях электронов  $u_0$ , меньших тепловых скоростей. По порядку величины инкремент нарастания ионно-звуковых колебаний — это плазменно-ионная частота, уменьшенная в отношении дрейфовой скорости электронов к тепловой. В предельном случае  $u_0 \rightarrow v_{Te}$  ионно-звуковая неустойчивость почти плавно переходит в бунемановскую неустойчивость.

При наличии магнитного поля появляются и другие типы неустойчивостей. Одна из них, также обязанный своим появлением электронной мнимой части (электронного полувычета) в ионно-циклотронных волнах, называется неустойчивостью Драммонда — Розенблюта. Она возникает тогда, когда ток протекает вдоль магнитного поля, в то время как первые две неустойчивости в известном смысле инвариантны по отношению к существованию магнитного поля, если оно не очень велико ( $\omega_{He} \ll \omega_{pe}$ ). Неустойчивость Драммонда — Розенблюта, по-видимому, не создает заметного аномального сопротивления, потому что она приводит к небольшим скоростям нарастания флуктуаций и, по-видимому, легко подавляется простыми квазилинейными эффектами, типа эффекта образования плато.

Более важную роль может играть класс неустойчивостей относительно электростатических возмущений  $k^2_{\perp} \gg k^2_z$ . Иначе говоря, это волны, у которых составляющая волнового вектора вдоль магнитного поля значительно меньше поперечной составляющей волнового вектора, а частоты значительно меньше электронной ларморовской частоты, но больше ионной. Эта мода напоминает моду, возникающую при наличии конуса потерь (см. § 2.8):

$$1 + \frac{\omega^2_{pe}}{\omega^2_{He}} + \frac{\omega^2_{pi}}{k^2} \int \frac{\mathbf{k} \cdot (\partial f^i_0 / \partial \mathbf{v})}{\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}} d\mathbf{v} + \frac{\omega^2_{pe}}{k^2} \int \frac{k_z (\partial f^e_0 / \partial v_z)}{\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{u}_0 - k_z v_z} d\mathbf{v} = 0. \quad (2.333)$$

В приближении  $\omega \gg kv_{Ti}$ ,  $\mathbf{k}\mathbf{u}_0 \gg k_z v_{Te}$  уравнение (2.333) переходит в дисперсионное уравнение для так называемой модифицированной неустойчивости Бунемана:

$$1 + \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^3 He} - \frac{\omega_{pi}^2}{\omega^2} - \frac{\omega_{pe}^2 k_z^2 / k^2}{(\omega - \mathbf{k}\mathbf{u}_0)^2 - k_z^2 v_{Te}^2} = 0. \quad (2.334)$$

Инкремент нарастания по порядку величины равен

$$\gamma \sim \sqrt{\omega_{Hi} \omega_{He}} \ll \omega_{pi}$$

при

$$kr_{He} \sim 1, \quad k_z = k u_0 / v_{Te}. \quad (2.334a)$$

Приближение (2.334) справедливо, если дрейфовая скорость заметно превышает  $v_{Ti}$ . Если это условие не выполнено, имеют место неустойчивости кинетического типа:

$$\left. \begin{aligned} \text{Re}(\omega - \mathbf{k}\mathbf{u}_0) &\approx k_z (T_i / m_e)^{1/2} / (1 + k^2 r_{H^*}^2)^{1/2}; \\ \text{Im} \omega &= \pi^{1/2} \frac{\omega}{2 |\mathbf{k}| v_{Ti}} (\omega - \mathbf{k}\mathbf{u}_0); \\ r_{H^*}^2 &= T_i / (m_e \omega^2 He). \end{aligned} \right\} \quad (2.335)$$

Неустойчивости такого типа имеют место, когда ток течет перпендикулярно к магнитному полю.

Самой сложной проблемой является связь между линейной теорией неустойчивости и величиной аномального электрического сопротивления в состоянии, когда наступает нелинейное насыщение роста неустойчивости. Для решения этой проблемы прибегают к мобилизации арсенала методов нелинейной теории поля в плазме, теории слабой турбулентности (см. § 1.16—1.18), размерностных оценок (в тех случаях, когда возникающая при аномальном сопротивлении турбулентность оказывается сильной) и т. д.

Приведем некоторые общие рассуждения, практически не зависящие от конкретной модели нелинейной стадии. Строгая постановка задачи о проводимости  $\sigma$  должна проводиться с учетом обмена импульсом между электронами и колебаниями. Обычная формула для проводимости плазмы  $\sigma = ne^2 / m\nu$  содержит частоту столкновений электронов  $\nu$  с рассеивающими центрами (ионами, нейтральными атомами) по отношению к потере импульса. Если электроны плазмы раскачивают некоторые типы колебаний или волн вследствие неустойчивости, то имеет место аномальная потеря импульса (передача колебаниям, т. е. коллективным движениям ионов). Для нахождения  $\nu_{eff}$  можно воспользоваться законом сохранения количества движения в системе электроны — волны. Средняя потеря импульса электронами за единицу времени равна

$$\nu_{eff} m_e n_0 u_0 \approx -F, \quad (2.336)$$



Если этот импульс передается волнам с плотностью энергии  $W$ , то изменение количества движения волн равно

$$\int \gamma_{\mathbf{k}}^e W_{\mathbf{k}} (k/\omega_{\mathbf{k}}) (dk/(2\pi)^3), \quad (2.337)$$

где  $\gamma_{\mathbf{k}}^e$  — вклад электронов в мнимую часть частоты. Приравнявая (2.336) и (2.337), получаем

$$v_{\text{eff}} m n_0 u_0 \approx \int \gamma_{\mathbf{k}}^e W_{\mathbf{k}} (k/\omega_{\mathbf{k}}) [dk/(2\pi)^3], \quad (2.338)$$

т. е.

$$v_{\text{eff}} = (1/m n_0 u_0) \int \gamma_{\mathbf{k}}^e W_{\mathbf{k}} \frac{k}{\omega_{\mathbf{k}}} [dk/(2\pi)^3]. \quad (2.339)$$

Таким образом, задача сводится к нахождению  $W_{\mathbf{k}}$ ;  $\gamma_{\mathbf{k}}^e$  следует понимать в квазилинейном смысле.

В справедливости соотношения (2.338) можно было бы убедиться и с помощью квазилинейного уравнения диффузии для электронов на примере ионно-звуковых колебаний.

Наличие аномального сопротивления приводит к аномальному выделению джоулева тепла в плазме  $j^2/\sigma_{\text{eff}}$ . Такой нагрев плазмы часто называют турбулентным, поскольку механизмом, определяющим природу аномального сопротивления плазмы, является турбулентность, вызванная неустойчивостью. При отсутствии парных соударений турбулентный нагрев неодинаков для электронной и ионной компонент плазмы. Более того, нельзя даже говорить о возрастании температур электронов и ионов, подразумевая температуры в традиционном смысле (максвелловского распределения частиц). Под температурой таких плазм обычно условно понимают средние хаотические энергии компонент.

Как правило, в процессе турбулентного нагрева плазмы быстрее увеличивается температура электронов. Можно установить простой критерий, связывающий скорость нагрева электронов со скоростью нагрева ионов. Вывод такого критерия основан на использовании законов сохранения количества движения и энергии при взаимодействии электронов и ионов с колебаниями. На электроны плазмы действует сила трения

$$\mathbf{F} = -v_{\text{eff}} n_0 m \mathbf{u}_0. \quad (2.340)$$

Работа этой силы, очевидно, затрачивается на нагрев электронов плазмы:

$$d\omega_e/dt \sim v_{\text{eff}} m_e u_0^2 = (1/n_0) \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \gamma_{\mathbf{k}}^e W_{\mathbf{k}} (k \cdot \mathbf{u}_0)/\omega_{\mathbf{k}}. \quad (2.341)$$

В стационарном состоянии насыщения, достигаемого, когда рост неустойчивости ограничивается нелинейными эффектами, количество движения колебаний (а вместе с тем и их энергия) передается ионам. Таким образом, в состоянии насыщения ионы должны по-

глощать энергию колебаний со скоростью порядка  $\int \gamma_{\mathbf{k}}^e W_{\mathbf{k}} d\mathbf{k}$ .

В результате нагрев ионов должен происходить со скоростью

$$d\omega_i/dt \sim (1/n_0) \int \gamma_{\mathbf{k}}^e W_{\mathbf{k}} d\mathbf{k} / (2\pi)^3. \quad (2.342)$$

Теперь разделим уравнение (2.341) на (2.342):

$$d\omega_e/d\omega_i \sim \int \gamma_{\mathbf{k}}^e W_{\mathbf{k}} (\mathbf{k} \cdot \mathbf{u}_0 / \omega_{\mathbf{k}}) d\mathbf{k} / \int \gamma_{\mathbf{k}}^e W_{\mathbf{k}} d\mathbf{k}. \quad (2.343)$$

Если в формуле (2.343) приближенно положить

$$\int \gamma_{\mathbf{k}}^e W_{\mathbf{k}} (\mathbf{k} \cdot \mathbf{u}_0 / \omega_{\mathbf{k}}) d\mathbf{k} \sim (\mathbf{k} \cdot \mathbf{u}_0 / \omega_{\mathbf{k}}) \int \gamma_{\mathbf{k}}^e W_{\mathbf{k}} d\mathbf{k},$$

то для отношения скорости нагрева электронов к скорости нагрева ионов получим оценку

$$d\omega_e/d\omega_i \sim u_0 (\omega/k). \quad (2.344)$$

Это соотношение в том виде, в котором оно получено, не зависит от типа неустойчивости и поэтому носит универсальный характер. Для большинства неустойчивостей оно действительно приводит к более быстрому нагреву электронов. Так, при ионно-звуковой неустойчивости, как правило,  $u_0 \gg \omega/k$  и, следовательно,  $d\omega_e/d\omega_i \gg 1$ .

Для этого примера полезно привести выражение (2.339) к более наглядному виду. Подставим в него максимум инкремента нарастания колебаний ионно-звукового типа  $\gamma_{\mathbf{k}}^e \approx \omega u_0 / v_{Te}$ , достигаемый при  $k \sim r_D^{-1}$ . Тогда получим следующее соотношение:

$$v_{eff} \sim \omega_p W / n_0 T_e. \quad (2.345)$$

Таким образом, зная плотность энергии колебаний  $W$  в режиме насыщения неустойчивости, можно было бы найти  $v_{eff}$ . Для нахождения  $W$  в нелинейной теории плазмы имеется регулярный метод — теория слабой турбулентности. Но этот метод не всегда применим. Даже простейший случай неустойчивости Бунемана следует рассматривать с позиций сильной турбулентности. Существующие теории сильной турбулентности могут претендовать лишь на оценки по порядку величины.

Ионно-звуковая неустойчивость представляет собой удобный пример исследования с помощью метода слабой турбулентности. Мнимая часть частоты в данном случае значительно меньше, чем ее действительная часть, поскольку дрейфовая скорость может быть много меньше средней тепловой скорости электронов. Нелинейной теории ионно-звуковой неустойчивости и вычисления аномального сопротивления посвящено много работ. Остановимся на этом вопросе несколько подробнее. Плотность энергии  $W_{\mathbf{k}}$  моды колебания с волновым вектором  $\mathbf{k}$  нарастает при малых амплитудах экспоненциально. Затем при больших амплитудах должны включаться эффекты нелинейного насыщения и, возможно, возник-

нет установившееся или квазиустановившееся состояние. Тогда можно найти спектр  $W_{\mathbf{k}}$ , компенсируя линейное нарастание одним из эффектов, связанных с нелинейным насыщением. Нелинейный член, исходя из соображений размерности, символически представим в следующем виде:

$$0 = \{2\gamma_{\mathbf{k}} - A\omega_{\mathbf{k}}(W/n_e T_e)\} W_{\mathbf{k}}. \quad (2.346)$$

Для ионно-звуковых колебаний запрещены резонансы трехволновых взаимодействий (см. § 1.18), поэтому единственным эффектом, который дает член порядка  $W^2$ , может быть эффект нелинейного рассеяния волны на ионах (см. § 1.17). Это эффект, который обусловлен наличием знаменателей типа  $\omega - \omega' - (\mathbf{k} - \mathbf{k}') \cdot \mathbf{v}$ , т. е. резонансов Ландау на нелинейных биениях, возникающих от каждой произвольно выбранной пары волн. Эти биения попадают в резонанс с ионами, и часть энергии поглощается, а другая часть переходит в волну с меньшей частотой. На самом деле квадратичный член представляет собой некое довольно сложное интегральное выражение, слишком громоздкое для целей данной книги. Величину этого члена оценим следующим образом: так как данный эффект связан с тепловым движением ионов, то оператор  $A$  пропорционален малому множителю  $T_i/T_e$  (поскольку речь идет об ионном звуке, то по определению необходимо, чтобы  $T_i \ll T_e$ ). Поскольку он безразмерен, предположим, что он просто равен  $A \sim T_i/T_e$ . Эту оценку подтверждает строгая теория слабой турбулентности. Итак,

$$W \approx 10^{-2} (T_e/T_i) (u_0/v_{Te}) n T_e. \quad (2.347)$$

Численный множитель дает строгая теория. Это приводит к следующей формуле для эффективной частоты соударений:

$$\nu_{\text{eff}} \approx 10^{-2} \omega_{pi} (u_0/c_s) (T_e/T_i). \quad (2.348)$$

Таким образом, если бы по плазме удавалось пропускать ток, существенно превышающий критическое значение, так что электроны теряли бы импульс из-за когерентного излучения фононов, т. е. ионно-звуковых колебаний, то в конце концов установился бы некий стационарный спектр, и  $\nu_{\text{eff}}$  определялась бы формулой (2.348).

Укажем, что если по плазме с первоначально изотермическими ионами и электронами (ионно-звуковые колебания невозможны) протекает ток в режиме аномального сопротивления вследствие неустойчивости Бунемана, то рано или поздно этот режим должен смениться на ионно-звуковой. Это связано с тем, что электроны, как было отмечено, нагреваются в  $k u_0/\omega$  раз быстрее, чем ионы, и плазма в конце концов становится неизотермической. Ионно-звуковая же неустойчивость в этом смысле является самоподдерживающейся, так как при  $u_0 \gg c_s$  электроны всегда получают больше тепла, чем ионы.

В рассмотренной модели аномального сопротивления имеется трудное место. Ни одна из четырех величин  $u_0$ ,  $c_s$ ,  $T_e$  и  $T_i$ , которые входят в формулу (2.348), в настоящей плазме при отсутствии реальных парных соударений (при наличии лишь рассеяния на флуктуациях) уже не может иметь своего обычного смысла. Начнем с электронной температуры. Если нет парных соударений, то очень трудно ожидать, что функция распределения будет максвелловской. Даже если не требовать, чтобы функция распределения электронов была максвелловской, и характеризовать ее неким средним тепловым разбросом, то необходимо, чтобы  $f_e^0$  имела довольно быстро сходящиеся «хвосты». В этом случае можно было

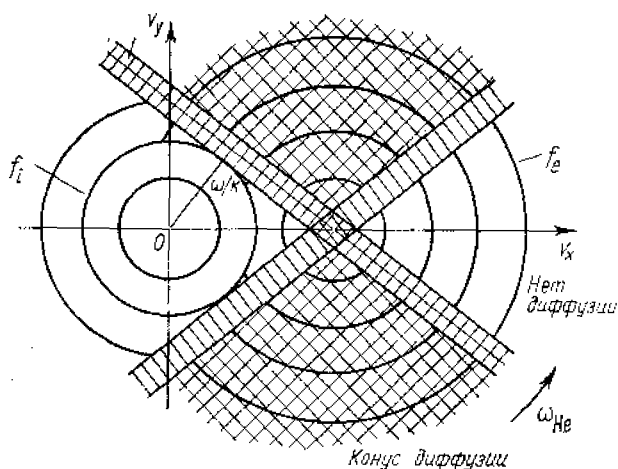


Рис. 2.58. Квазилинейная диффузия электронов при ионно-звуковой неустойчивости

бы, по крайней мере условно, говорить о температуре электронов. Но с ионами ситуация еще более сложна, если они взаимодействуют только с волнами (нет парных соударений).

Перейдем к обсуждению возможного вида функций распределений ионов и электронов. Воспользуемся двумерной картиной пространства скоростей, показанной на рис. 2.58. Здесь по оси абсцисс отложена компонента скорости частиц вдоль направления протекания тока, а по оси ординат — поперечная компонента.

Пусть первоначально имеется обычное максвелловское распределение электронов и ионов. Для максвелловского распределения линии равного значения функции распределения в этой плоскости являются окружностями. Центр таких окружностей для ионов (положение максимума функции распределения) находится в начале координат. Для электронов он смещен на величину  $u_0$ : они переносят ток. Взаимодействие волн с частицами особенно сильно тог-

да, когда осуществляется резонанс Ландау. Взятая наугад волна с фазовой скоростью  $\omega/k$  взаимодействует с частицами, находящимися вблизи прямой (см. рис. 2.58). Именно для таких частиц осуществляется резонанс. Наконец, если рассмотреть волны всевозможных направлений и разных значений фазовых скоростей, то можно убедиться, что все частицы, находящиеся в окрестности линии, соответствующей условию резонанса Ландау, испытывают действие поля волн. Но в ионно-звуковом спектре отсутствуют волны со скоростями меньше некоторой ( $\omega/k \leq v^*$ ) (см. § 1.11, 1.12).

Частицы с  $v < v^*$  в квазилинейном приближении не взаимодействуют с волнами. Здесь взаимодействие оказывается гораздо более слабым, оно связано с нелинейными эффектами следующего приближения. Ионов в области взаимодействия с волнами довольно мало; таким образом, лишь малая доля ионов подвергается мощному воздействию со стороны волн. В нулевом приближении функция распределения ионов в основной области практически не деформируется. В резонансной же области возникает сильная деформация из-за квазилинейной диффузии в пространстве скоростей. Когда парные столкновения не играют роли, такое изменение функции распределения ионов очень существенно. Оно сильно меняет ионную мнимую часть в дисперсионном уравнении (ионный полувывет, пропорциональный числу ионов, которые могут находиться в резонансе). Это, как правило, весьма малая величина, очень чувствительная к тому, что происходит на «хвосте» ионного распределения.

С электронами же происходит следующее: область запрещенных скоростей, внутри которой отсутствует резонанс между частицами и волнами, сравнительно невелика, потому что скорость звука в  $\sqrt{m_i/m_e}$  раз меньше средней тепловой скорости электронов. В принципе можно пренебречь тем, что происходит внутри этого небольшого кружка. Но возникает другая сложность. Очень трудно представить себе, чтобы ток раскачивал волны, почти поперечные своему направлению. Действительно, из теории ионно-звуковой неустойчивости следует, что волны с волновым вектором, практически поперечным направлению тока, имеют малую мнимую часть и практически их можно считать устойчивыми.

Таким образом, приходим к выводу, что здесь образуется небольшой конус в пространстве скоростей, в котором нет волн для резонанса с электронами. Эти электроны свободно ускоряются электрическим полем, вызывающим ток в плазме. Вклад таких электронов может сильно уменьшить сопротивление плазмы. Какая же доля электронов попадает в этот конус потерь и дальше свободно ускоряется? Задачу можно разбить на два предельных случая. Сначала целесообразно выделить более простой случай, когда имеется хотя бы слабое магнитное поле  $H_0$ , перпендикулярное к плоскости (см. рис. 2.58). Такое магнитное поле медленно вращает электроны (в сравнении с частотой плазменных колеба-

ний). Но оно может быть достаточно быстрым в масштабе времени, в котором появилось бы убегающее электронов в «конус потерь». И, таким образом, в среднем все электроны за один ларморовский оборот оказываются взаимодействующими с волнами. В этой задаче для электронов не возникает дополнительной трудности. Хотя  $f'_0$  и не сводится к максвелловскому распределению, тем не менее можно говорить о средней электронной температуре.

Итак, будем считать, что если имеется слабое поперечное магнитное поле, то все результаты для эффективного числа соударений можно переносить даже и на далекие моменты времени, когда могло бы существенно сказаться искажение электронного распределения, его отклонение от максвелловского распределения. Именно такая ситуация имеет место с бесстолкновительными ударными волнами поперек магнитного поля (см. § 2.20).

Однако проблемы, связанные с ионным распределением, остаются и в этом случае. Дело в том, что ионы не успевают перемещаться под действием магнитного поля, и поэтому ионное распределение может приобрести довольно экзотическую форму и в конце концов станет сильно отличаться от максвелловского. Можно ожидать, что основная часть ионов будет холодной, а какая-то часть ионов, движущихся со скоростями, начиная от скоростей порядка скорости звука, будет нагреваться. По-видимому, в ближайшее время нельзя без использования численных методов найти вид такого сложного ионного распределения.

Более простыми должны быть закономерности при малой нелинейности, когда достаточно ограничиться только квазилинейным приближением. В таком приближении насыщение неустойчивости достигается вследствие квазилинейной деформации функции распределения ионов, в результате которой даже в неизоэнтальной плазме появляется группа ионов с большими скоростями  $v \geq c_s$ . Такие ионы, резонансно поглощая ионно-звуковые волны, должны уравновешивать раскачку колебаний электронами.

Рассмотрим процесс нелинейного, в данном случае квазилинейного, насыщения колебаний. Пусть уравнение для спектра неустойчивых волн имеет символический вид [см. уравнение (2.346)]

$$dW_{\mathbf{k}}/dt = 2\gamma_{\mathbf{k}}^e W_{\mathbf{k}} - 2\gamma_{\mathbf{k}}^i W_{\mathbf{k}} - A(W/n_0 T_e) W_{\mathbf{k}}. \quad (2.349)$$

Наращение колебаний при  $u > c_s$  приводит к увеличению сопротивления, т. е. возникает сила трения, действующая на электроны. Если приложенное электрическое поле, создающее ток, не слишком велико, то, как следствие реакции электронов на увеличившееся сопротивление,  $u_0$  должно уменьшаться до тех пор, пока плазма не окажется на пороге неустойчивости. Это означает, что нелинейные члены в уравнении (2.349) играют малую роль, а насыщение колебаний определяется условием  $\gamma_{\mathbf{k}}^e \approx \gamma_{\mathbf{k}}^i$  для всех первоначально неустойчивых волн. Иначе говоря, для всех первоначально

неустойчивых волн должно выполняться условие при всех резонансных скоростях ( $\omega = kv$ )

$$\gamma_{\mathbf{k}} = \gamma_{\mathbf{k}}^e - \gamma_{\mathbf{k}}^i \approx [df_{e_0}^e/dv + (m_e/m_i) (df_{e_0}^i/dv)] = 0. \quad (2.350)$$

Условие (2.349) при пренебрежении последним членом не содержит амплитуды установившихся колебаний  $W_{\mathbf{k}}$  и, следовательно, с его помощью сразу нельзя вычислить  $v_{\text{eff}}$ . Эффективную частоту столкновений для такого режима насыщения неустойчивости (его иногда называют «пороговым» или квазилинейным) можно найти из закона Ома, подставив в него найденное выражение для  $j = en_0 u_0 \approx en_0 v_e$ . Считая  $j = en_0 v_e = \sigma E$ , находим

$$v_{\text{eff}} = eE/m_e v_e. \quad (2.351)$$

Теперь с помощью соотношения (2.339), связывающего  $v_{\text{eff}}$  с энергией колебаний, можно найти  $W$ :

$$W/n_e T_e \approx (eEr_D/n_e T_e) (v_{Te}/v_e). \quad (2.352)$$

С ростом  $E$  увеличивается  $W$ , и при достаточно больших полях уже нельзя пренебречь нелинейным членом в уравнении (2.349). Кажущиеся простыми формулы для порогового (квазилинейного) режима на самом деле сложны. Казалось бы, для нахождения  $u_0 \approx v_e$  достаточно линейного выражения для мнимой части частоты. Однако  $\gamma_{\mathbf{k}}^i$  очень чувствительно к виду ионного распределения при больших скоростях ионов, т. е. на хвосте функции распределения. Такие ионы, поглощая колебания, увеличивают свою энергию и быстро меняют вид своей функции распределения (из-за квазилинейных эффектов). В результате быстро меняется  $\gamma_{\mathbf{k}}^i$  и, следовательно,  $v_e$ .

Если тепловая энергия, поглощаемая частицами плазмы, не отводится наружу, то можно ожидать, что в конце концов выделится некоторая группа ионов, поглощающая всю энергию волн. Поступим следующим образом. Ионное распределение разобьем на группу холодных и горячих ионов. В таком упрощенном (двухгрупповом) приближении можно найти величины, характеризующие протекание тока. Группа ионов, которые попадают в резонанс с ионно-звуковыми колебаниями и затем ускоряются, сравнительно невелика. Обозначим их концентрацию  $X$ . Введем эффективную температуру таких резонансных ионов  $T_i \sim m_i v_i^2$ . Тогда из (2.344) имеем

$$T_e/T_i \approx Xu_0/c_s. \quad (2.353)$$

Оценивая ионный декремент как  $\gamma_i \approx \omega^2 \nu_i (\omega/k^2) X c_s / (T_i/m_i)^{3/2}$  (в предположении, что  $T_i \geq T_e$ ) и сравнивая его с электронным (см. табл. 2.2 в начале параграфа), получаем

$$X \approx (m_e/m_i)^{1/4} (T_i/T_e)^{1/4}. \quad (2.354)$$

Теперь мы имеем два уравнения (2.353) и (2.354) для трех неизвестных  $X$ ,  $u_0/c_s$  и  $T_i/T_e$ . Для нахождения третьего уравнения рассмотрим импульс резонансных ионов. Импульс, теряемый электронами при рассеянии, переходит к ионам. Поэтому распределение ионов по скоростям должно быть анизотропным. Функцию распределения ионов представим в виде  $f_i(\mathbf{v}, \theta) = f_{i0}(v) + f_{i1}^a(\mathbf{v}, \theta)$ , где анизотропная часть  $f_{i1}^a$  может быть оценена из следующих соображений. При поглощении колебаний резонансный ион в среднем поворачивается на угол  $\Delta\theta \sim W/m_i c_s v_i$ . Относительное приращение энергии ионов в том же процессе имеет порядок величины  $\Delta T_i/T_i \sim W/T_i$ . Таким образом, размешивание по углу, стремящееся сделать распределение изотропным, в  $v_i/c_s$  раз сильнее. Тогда

$$|P_i| \approx \left| \int m_i v_i f_{i1}^a dv \right| \approx n_s X m_i c_s.$$

Недостающее уравнение получим из условия, что работа силы трения  $dP_i/dt$  затрачивается на нагрев электронов  $(dP_i/dt)u_0 \approx n_0 dT_e/dt$ , т. е.

$$X m_i c_s u_0 \approx T_e. \quad (2.355)$$

Окончательный результат решения полученной системы уравнений имеет вид

$$u_0 \approx c_s (m_i/m_e)^{1/4}, \quad T_i \approx T_e, \quad X \approx (m_e/m_i)^{1/4}. \quad (2.356)$$

Итак, средняя хаотическая энергия этих горячих ионов по порядку величины близка к средней хаотической энергии основной массы электронов. Это своего рода скейлинг для квазилинейного режима аномального сопротивления.

Этот скейлинг относится к случаю тока, поперечного или почти поперечного к магнитному полю. Представим себе теперь, что магнитное поле у нас либо совсем отсутствует, либо действует в направлении протекания тока. Тогда сразу исчезает тот механизм, который перемешивает все электроны, и задача об электронной функции распределения усложняется. Как поступить в этом случае? По-видимому, невозможно ввести двухгрупповое распределение электронов, потому что нет явно выраженных двух групп электронов, как это было в случае с ионами. Наоборот, возникает плавный переход от медленных электронов ко все более быстрым, и в конце концов с течением времени, как показывает качественный анализ, значительная доля электронов попадает в область скоростей, где практически нет волн. Это явление напоминает убегание электронов в газе с лоренцевскими столкновениями, когда частота соударений падает со скоростью  $v^{-3}$ . Взаимодействие электронов с ионно-звуковыми волнами обладает именно такими свойствами.

Вопрос о том, какой вид в конце концов примет закон Ома в такой плазме, на сегодняшний день остается открытым. Одна из распространенных точек зрения такова: значительная доля электронов попадает в режим убегания, функция распределения электронов в проекции на параллельную полю скорость оказывается



сильно вытянутой в направлении тока, отношение средней дрейфовой скорости электронов к средней тепловой скорости электронов может стать равным единице.

Рассмотрим теперь аномальное сопротивление из-за какой-нибудь другой неустойчивости (см. табл. 2.2 в начале § 2.19). Наиболее низким порогом возбуждения (малым значением  $u_0$ ) обладают электростатические неустойчивости с  $k_z \ll k_\perp$  в плазме с током, текущим поперек магнитного поля. Нелинейное насыщение этих видов неустойчивости не поддается рассмотрению с помощью методов теории слабой турбулентности. Обратимся, например, к случаю модифицированной неустойчивости Бунемана [см. формулу (2.334)].

Дисперсионное уравнение (2.334) отличается от обычного уравнения Бунемана лишь заменой  $\omega_{pi}$  на  $\omega_{pi}/\sqrt{1+\omega_{pe}^2/\omega_{He}^2}$  и  $\omega_{pe}$  на  $\omega_{pe}k_z/k\sqrt{1+\omega_{pe}^2/\omega_{He}^2}$ . Можно оценить амплитуду колебаний в режиме насыщения так, как это часто делается в теории сильной турбулентности. Сравним линейный  $\partial\mathbf{u}/\partial t$  и нелинейный  $(\mathbf{u}\nabla)\mathbf{u}$  члены в уравнении для электронов

$$\partial\mathbf{u}/\partial t + (\mathbf{u}\nabla)\mathbf{u} = e/m \left\{ \mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{u} \times \mathbf{H}] \right\}.$$

В нелинейной стадии эти члены должны конкурировать друг с другом, приводя к квазистационарному режиму насыщения неустойчивости. Приравнявая их по порядку величины, получаем

$$ku_0 \sim (kc/H_0) \sum_{\mathbf{q}} q\varphi_{\mathbf{q}}.$$

Отсюда можно сделать следующую оценку плотности энергии колебаний:

$$\sum_{\mathbf{k}} n_0 e^2 |\varphi_{\mathbf{k}}|^2 / 2T_e \approx m_e n_0 u^2, \quad kr_{He} \approx 1. \quad (2.357)$$

Теперь с помощью формулы (2.339) получим

$$v_{eH} \approx \omega_{He} u_0 / v_{Te}. \quad (2.358)$$

Эта неустойчивость, как правило, раскачивается медленнее, чем ионно-звуковая (при  $T_e \gg T_i$ ), но она может иметь место и в плазмах с большой ионной температурой. В отличие от ионного звука для этой неустойчивости не требуется выполнения условия  $T_e \gg T_i$ .

Явление аномального сопротивления, как это следует из проведенного обсуждения, по-прежнему остается одним из самых трудных разделов физики коллективных процессов в плазме. По сути дела, на сегодняшний день в арсенале теории кроме некоторых полуквантитативных соображений и оценок имеется несколько моделей для частных предельных случаев. Общий же сценарий реа-

лизовать не так-то просто. Анализ даже квазилинейного режима аномального сопротивления, освобожденный от учета нелинейного взаимодействия волн, в общем виде не проведен. Здесь полезным оказывается численный эксперимент (рис. 2.59).

Подводя итоги, отметим, что качественный ход аномального закона Ома  $j=j(E)$ , т. е. вольт-амперная характеристика, должен иметь вид, изображенный на рис. 2.60. При докритической плотности тока  $(u_0/v_{Te}) < (u_0/v_{Te})_{cr}$  все устойчиво, линейная часть графика  $j=j(E)$  соответствует классической электропроводности из-за столкновений. Вблизи порога токовой неустойчивости  $u_0/v_{Te} \approx (u_0/v_{Te})_{cr}$  резко возрастают флуктуации, а следовательно, и эф-

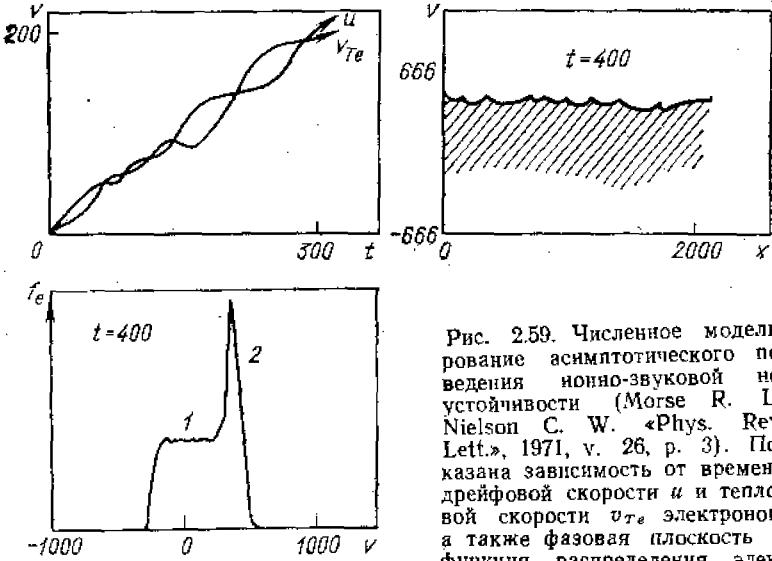


Рис. 2.59. Численное моделирование асимптотического поведения ионно-звуковой неустойчивости (Morse R. L., Nielson C. W. «Phys. Rev. Lett.», 1971, v. 26, p. 3). Показана зависимость от времени дрейфовой скорости  $u$  и тепловой скорости  $v_{Te}$  электронов, а также фазовая плоскость и функция распределения электронов при  $t=400$ .

Эксперимент проводился с реальным отношением масс электронов и ионов, при напряженности электрического поля  $E_0=0,02m_e\omega_{pe}v_{Te}^2/e$  и начальном отношении температур  $T_e/T_i=1$ . Время измерилось в обратных плазменных частотах  $1/\omega_{pe}$ , скорости — в единицах  $v_{Te}^2/2\pi$ . Графики иллюстрируют появление на функции распределения наряду с сильно размытым электронным «кernом» (1) группы убегающих электронов (2) в асимптотическом режиме  $u \approx v_{Te} \sim t$ . Срыв ускоренна на начальной стадии связан с возникновением ионно-звуковой неустойчивость в результате преимущественного нагрева электронов

фективная частота соударений (в результате рассеяния электронов на флуктуациях). Конкретное значение порога  $(u_0/v_{Te})_{cr}$  зависит от того, какой из типов токовой неустойчивости оказывается существенным. Резкое увеличение  $v_{eff}$  при достижении порога неустойчивости приводит к появлению излома на кривой  $j(E)$ . В масштабах, принятых для измерения классической электропроводности, кривая зависимости  $j(E)$  в области неустойчивости практически параллельна оси абсцисс. Для того чтобы создать ток, существенно превышающий критический, потребовалось бы приложить громад-

ное электрическое поле. Ход  $j(E)$  в этой закритической области существенно нелинеен. Так, например, в ранее рассмотренном режиме нелинейного насыщения ионно-звуковой неустойчивости из (2.348) можно получить зависимость  $j \sim E^{1/2}$ .

Эксперименты по аномальному сопротивлению с трудом поддаются интерпретации, так как параметры плазмы при изменении  $j$  и  $E$  сильно меняются. Для ориентировки ниже на рис. 2.61 приводятся экспериментальные данные по аномальному сопротивлению при больших  $j$ .

До сих пор при исследовании турбулентности плазмы в электрическом поле и механизмов аномального сопротивления предполагалось, что приложенная к плазме разность потенциалов равномерно (или почти равномерно) распределяется по всему объему, т. е. электрическое поле в плазме является почти однородным.

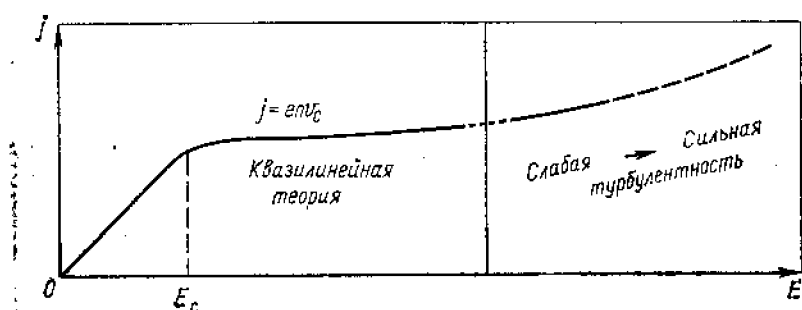


Рис. 2.60. Закон Ома в случае ионно-звуковой турбулентности

Однако в реальных ситуациях с граничными условиями картина может быть совсем другой. Мысленно выделим в плазме элементарную токовую трубку, т. е. трубку, ограниченную линиями электрического тока. Пусть по какой-либо причине вдоль линий тока имеется такая неоднородность параметров плазмы, из-за которой безразмерное отношение  $u_0/v_{Te}$  меняется вдоль трубки.

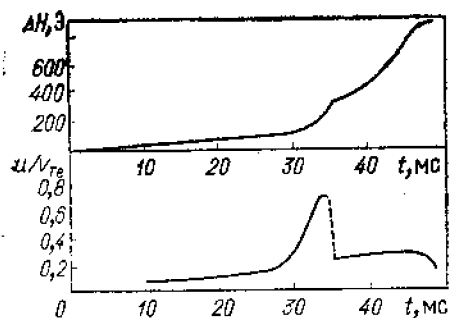


Рис. 2.61. Профиль магнитного поля во фронте бесстолкновительной ударной волны, измеренный неподвижным зондом при прохождении ударной волны мимо него, и вычисленное по этим данным отношение токовой скорости электронов к тепловой.

На переднем участке фронта токовая скорость растет до тех пор, пока развитие токовой неустойчивости (по-видимому, бунемановской) не приводит к разогреву электронов. Затем она резко падает из-за перехода в квазилинейный режим ионно-звуковой неустойчивости, в котором токовая скорость практически не зависит от электрического поля. Эксперимент выполнен в водородной плазме с плотностью  $n_0 = 1,5 \cdot 10^{14}$  см $^{-3}$ , помещенной в магнитное поле  $H_0 = 700$  Гс. Число Маха  $M \approx 2$  (Еселевич В. Г., Еськов А. Г., Куртмулаев Р. Х., Малютин А. И. «Журн. эксперим. и теор. физ.», 1971, т. 60, с. 2079)

Если неоднородность такова, что разные участки вдоль линии тока соответствуют различным режимам  $j=j(E)$  (см. рис. 2.60), то произойдет следующее. Разность потенциалов, приложенная к концам трубки, распределится неравномерно. Основное падение потенциала придется на зоны с максимальным отношением  $u_0/v_{Te}$ . В силу резко нелинейного характера  $j(E)$  различие в  $E$  между областями с минимальным и максимальным значениями отношения  $u_0/v_{Te}$  может стать громадным. Однако такой профиль потенциала с течением времени должен еще более обостриться. Действительно, учтем выделение джоулева тепла при аномальном сопротивлении (турбулентный нагрев). В зонах с наибольшими значениями

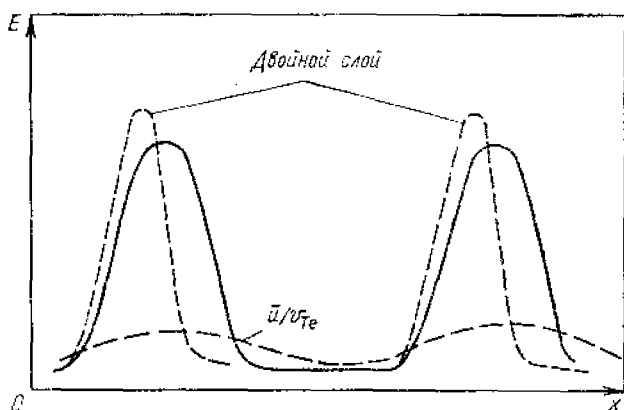


Рис. 2.62. Образование двойных слоев при протекании тока с аномальным сопротивлением

отношения  $u_0/v_{Te}$ , а значит и с  $E$ , оно резко увеличено. Это тепло вдоль линий тока должно увлекаться электронами. Этот конвективный перенос учитывается в выражении для потока тепла членом  $u_0 dT_e/dx$  [см. уравнение (1.87)]. Перераспределение температуры вдоль линий тока, вызванное этим эффектом, меняет  $v_{Te}$  и, следовательно,  $u_0/v_{Te}$ . Нетрудно увидеть, что уменьшение  $u_0/v_{Te}$  «вниз по течению» (по направлению движения электронов, переносящих ток) в зонах максимального  $E$  должно вести к новому распределению  $E$ . Качественно последовательность процессов, протекающих после включения тока, показана на рис. 2.62.

Резкое сужение зон аномально большого электрического поля с образованием скачков потенциала напоминает образование ударных волн при нелинейной эволюции профиля скорости в газодинамике. Эта аналогия, в действительности, является очень глубокой: скачок потенциала, или двойной слой, сопровождается также скачком параметров плазмы, например температуры электронов. Хотя, как уже указывалось, о температуре при аномальном сопротивлении следует говорить, соблюдая известную осторожность,

двойной слой с полным основанием можно назвать своего рода электростатической ударной волной в плазме, рассматриваемой как двухкомпонентная среда.

Любопытно отметить, что простейшим предельным случаем такого скачка потенциала является классический двойной слой Ленгмюра. Он возникает, например, вблизи катода, поставляющего электроны со средней скоростью  $u_K$ , меньшей токовой скорости  $u_0$  в результирующем разряде. По этой причине необходим начальный разгон электронов электрическим полем в слое, чтобы преодолеть своего рода порог  $(u_0/u_K) \sim 1$ .

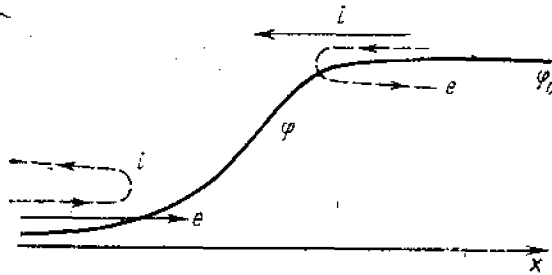


Рис. 2.63. Распределение потенциала и траектории частиц внутри двойного слоя

Эта старая модель двойного слоя очень проста и заслуживает того, чтобы ее воспроизвести. В стационарном случае ускорение электронов в слое находится из уравнения движения

$$m_e u_e du_e / dx = e d\varphi / dx - (T_e / n_e) dn_e / dx. \quad (2.359)$$

Если скачок потенциала  $e\varphi_0 \gg T_e$ , то в уравнении движения электронов можно пренебречь силой газокINETического давления. Тогда скорость электронов в слое находится из закона сохранения энергии:

$$u_e = \sqrt{u_0^2 + 2e\varphi / m_e}, \quad (2.360)$$

$u_0$  — скорость, с которой электроны инжектируются в двойной слой. Плотность электронов внутри слоя определяется условием постоянства тока:

$$n_e = j_e / u_e. \quad (2.361)$$

Аналогичным образом для ионной компоненты имеем

$$u_i = \sqrt{(2e/m_i)(\varphi_0 - \varphi)}; \quad n_i = j_i / u_i, \quad (2.362)$$

где мы предположим, что на анодной стороне слоя, т. е. при  $\varphi = \varphi_0$ , скорость ионов обращается в нуль (рис. 2.63) (ускорение ионов происходит вверх по течению). Распределение потенциала внутри двойного слоя определяется из уравнения Пуассона

$$d^2\varphi / dx^2 = 4\pi e (j_e / \sqrt{u_0^2 + 2e\varphi / m_e} - j_i / \sqrt{(2e/m_i)(\varphi_0 - \varphi)}). \quad (2.363)$$

Первый интеграл этого уравнения дает электрическое поле в слое:

$$\frac{1}{2} E^2 = 4\pi (j_e m_e \sqrt{u_0^2 + 2e\varphi/m_e} - j_e m_e u_0 + j_i \sqrt{2em_i(\varphi_0 - \varphi)} - j_i \sqrt{2em_i\varphi_0}). \quad (2.364)$$

Отсюда с помощью очевидного условия  $E = -d\varphi/dx \rightarrow 0$  при  $\varphi \rightarrow \varphi_0$  получили некий аналог вольт-амперной характеристики двойного слоя — соотношение, связывающее скачок потенциала с плотностью электронного и ионного токов:

$$j_e = j_i \sqrt{2e\varphi_0 m_i / (m_e \sqrt{u_0^2 + 2e\varphi_0/m_e} - m_e u_0)}. \quad (2.365)$$

В наиболее важном случае  $e\varphi_0 \gg m_e u_0^2$  из (2.365) приходим к так называемому условию Ленгмюра

$$j_e = j_i \sqrt{m_i/m_e}. \quad (2.366)$$

Распределение потенциала, определяемое интегрированием уравнения (2.364), см. на рис. 2.63, распределение плотности зарядов в слое находим по формуле  $\rho = -1/4\pi d^2\varphi/dx^2$ . Слева, в катодной части двойного слоя, имеется избыток электронов ( $\rho < 0$ ). Внутри слоя происходит ускорение электронов, их плотность падает, и в анодной части двойного слоя возникает избыток ионов ( $\rho > 0$ ). Как уже упоминалось выше, двойной слой Ленгмюра — структура, в значительной степени аналогичная нелинейным электростатическим волнам (см. § 1.20). Однако имеются и некоторые важные различия. Прежде всего двойной слой — стационарная структура. Кроме того, в двойном слое электрический заряд локализован в узкой области пространства, вне слоя имеет место квазинейтральность. Поскольку плотность электронов в слое падает вниз по течению, а плотность ионов — в обратном направлении, то очевидно, что с помощью только двух компонент — ускоренных электронов и ионов — нельзя обеспечить квазинейтральность по обе стороны от двойного слоя. Для этого необходимы еще две группы частиц — холодные ионы в катодной части двойного слоя и холодные электроны в его входной части (см. рис. 2.63). Обе эти группы частиц отражаются от потенциальных горбов, каким является для них распределение потенциала в слое. При  $e\varphi_0 \gg T_e$  эти частицы не проникают глубоко внутрь слоя и не влияют существенно на распределение потенциала в нем, они нужны только для обеспечения квазинейтральности по обе стороны от слоя.

Еще одну важную особенность двойного слоя легко усмотреть из уравнения (2.359). Воспользовавшись условием (2.361), это уравнение можно записать в виде

$$(m_e u - T_e / u) du / dx = e d\varphi / dx. \quad (2.367)$$

Отсюда следует, что ускорение электронов в направлении возрастания  $\varphi$ , необходимое для возникновения двойного слоя, можно

обеспечить только при выполнении условия

$$m_e u^2 > T_e. \quad (2.368)$$

Уже известно, что это неравенство одновременно определяется условием возникновения бунемановской неустойчивости. Таким образом, в окрестности слоя Ленгмюра можно ожидать возбуждения интенсивных электростатических колебаний с частотой порядка ионной плазменной. Строгая теория двойного слоя, учитывающая турбулентность, которая возникает вследствие бунемановской неустойчивости, еще не построена. По всей видимости, развитие не-

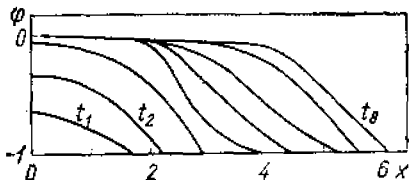


Рис. 2.64. Профили потенциала электрического поля на фронте тепловой ударной волны, измеренные через время  $\Delta t = 10^{-8}$  с.

Тепловая волна возбуждалась в аргоновой плазме ( $n_0 = 2 \cdot 10^{23}$  см $^{-3}$ ,  $T_e = 10$  эВ) локальным нагревом до температур порядка 300 эВ. Разлетающиеся горячие электроны

тормозились двойным электрическим слоем на фронте тепловой волны (Иванов А. А. и др. «Письма ЖЭТФ», 1971, т. 13, с. 691)

устойчивости не останавливает процесс инерционного ускорения электронов электрическим полем, однако в результате взаимодействия с турбулентными пульсациями у электронов появляется также хаотическая скорость  $V\langle v^2 \rangle$ . Если считать, что внутри двойного слоя направленная скорость электронов растет пропорционально хаотической  $V\langle v^2 \rangle$ , то остаются качественно справедливыми все старые формулы Ленгмюра с заменой  $m_e \rightarrow m_{eff} \sim 2m_e$ .

Вне двойного слоя в области, примыкающей к нему «снизу по течению», следует ожидать раскачки чисто электронной плазменной ветви колебаний быстрыми электронами, ускоренными полем внутри слоя. Эти электроны играют роль пучка на фоне более холодных электронов плазмы. Правдоподобная качественная картина двойного слоя с учетом неустойчивостей изображена на рис. 2.63.

Любопытное явление, по сути дела представляющее собой движущийся двойной электрический слой, было получено в лабораторных экспериментах (рис. 2.64) по так называемым электронным бесстолкновительным тепловым волнам.

## § 2.20. Бесстолкновительные ударные волны

Другой интересный пример важной роли коллективных процессов в плазме — бесстолкновительные ударные волны. В обычной газодинамике толщина фронта ударной волны ограничена снизу величиной порядка длины свободного пробега молекул в газе, в плазме же благодаря «коллективным» свойствам возможно существование специфических ударных волн, толщина которых зна-

чительно меньше длины свободного пробега. Простейшим примером являются уже рассмотренные в § 1.20 решения для ионно-звуковых солитонов.

Рассмотрим теперь ситуацию при наличии магнитного поля. Представим себе (рис. 2.65) ударную волну с толщиной  $\Delta$ , значительно меньшей длины свободного пробега  $l$ . Более быстрые частицы ( $v > u$ ) из области слева (нагретая ударной волной плазма), казалось бы, могли, свободно двигаясь в сторону невозмущенной плазмы, размыть переходную область до толщины  $l$ , равной длине свободного пробега. Какие эффекты могут предотвратить такое расплывание переходной области?

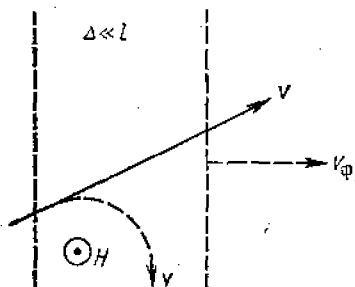


Рис. 2.65. Схематическое изображение фронта бесстолкновительной ударной волны

1. Самый простой случай имеет место при наличии магнитного поля, параллельного плоскости фронта. Такое магнитное поле заворачивает ионы и электроны плазмы на расстояниях порядка их ларморовского радиуса  $r_H$ . Следовательно, можно ожидать, что  $\Delta \sim r_H$ . Достаточно сильное магнитное поле ( $H^2/8\pi \gg nT$ ) препятствует размыванию даже в том случае, если оно не обязательно лежит в плоскости фронта. Это связано с тем, что скорость ударной волны при  $H^2/8\pi \gg nT$  намного превышает тепловую скорость частиц, и, следовательно, доля ионов (электронов), обгоняющих волну, экспоненциально мала. В задачах этого типа возникает следующий кажущийся парадокс. Состояния с обеих сторон фронта ударной волны связаны соответствующими законами сохранения (адиабатой Гюгонио), согласно которым энергия поступательного движения невозмущенной плазмы трансформируется во внутреннюю энергию плазмы после прохождения ударной волны.

Что же приводит к диссипации, если  $\Delta \ll l$ ? В возмущенном состоянии за фронтом волны основная доля внутренней энергии плазмы приходится на интенсивные плазменные колебания. Пронхождение таких нелинейных колебаний не обязательно связано с неустойчивостью плазмы. Оно тесно связано со специфическими дисперсионными свойствами плазмы (см. § 1.20). Иначе говоря, как и в нелинейной динамике ионно-звуковых волн, главную роль здесь играют конкуренция нелинейного укрупнения и отклонения от линейного закона дисперсии.

2. Когда магнитное поле мало, вообще отсутствует или перпендикулярно к фронту волны, механизм, мешающий расплыванию фронта ударной волны, имеет иную природу. Предположим, что вследствие расплывания некоторая доля быстрых частиц проникнет в невозмущенную плазму перед фронтом ударной волны. Тогда состояние плазмы в этой области представит собой смесь равновесного невозмущенного распределения частиц и некоторой



группы быстрых частиц, т. е. станет неравновесным (в итоге распределение частиц по скоростям будет отличаться от максвелловского). Неравновесная плазма неустойчива по отношению к раскачке различного рода колебаний. Флуктуирующие электрическое и магнитное поля колебаний, возникающих вследствие неустойчивости, приводят к рассеянию ионов и электронов. Иначе говоря, при наличии такого сорта флуктуирующих полей нужно переопределить понятие длины свободного пробега, подобно тому как это было сделано в задаче об аномальном сопротивлении.

Путь построения теории ударной волны без столкновений таков. Сначала строится ламинарная теория, основанная на представлении о регулярных нелинейных колебаниях (солитонные решения), затем исследуется устойчивость таких решений. Наконец, в неустойчивых случаях (а также тогда, когда ламинарных решений вообще не существует) строится «турбулентная» теория.

В ламинарной теории следует учесть влияние затухания на характер нелинейных установившихся волн, так как в отсутствие затухания эти волны описывают обратимые движения. Так, состояние плазмы до и после прохождения уединенной волны (солитон) одно и то же. Ясно, что учет диссипации должен нарушить обратимость, и состояния плазмы до и после уединенной волны будут различны. Если воспользоваться для нелинейных движений плазмы уравнениями сохранения потоков массы, импульса и энергии, то для установившихся движений эти уравнения, по определению, должны связывать состояния, подчиняющиеся уравнениям адиабаты Гюгонио. Состояния до и после уединенной волны без учета затухания тривиально удовлетворяют адиабате Гюгонио. Как изменится форма уединенной волны, если учесть диссипацию? Состояние после прохождения уединенной волны должно отличаться от исходного, причем различие это, конечно, определяется конкретным механизмом и величиной диссипации.

Кроме того, адиабата Гюгонио не зависит от конкретного механизма диссипации. В теории толщины ударной волны в обычной газодинамике этот кажущийся парадокс разрешается следующим образом. В зависимости от коэффициентов вязкости, теплопроводности и других величин, характеризующих диссипацию, меняется и сама форма переходной зоны (ее толщина). В разреженной же плазме «толщина» уединенной волны (при малой диссипации) задается независимо от адиабаты Гюгонио дисперсионными свойствами. Решение кажущегося парадокса в случае разреженной плазмы заключается в том, что состояние плазмы остается «возмущенным»: в плазме остаются интенсивные колебания, вклад которых в потоки импульса и энергии нужно учитывать. Это означает, что внутри фронта ударной волны самопроизвольно нарастают регулярные колебания конечной амплитуды.

В случае разреженной плазмы, находящейся в магнитном поле, когда длина свободного пробега значительно больше среднего ларморовского радиуса ионов, формальное газодинамическое описание

применимо (для движений поперек силовых линий) и внутри пространственных областей, меньших свободного пробега. Необходимо только, чтобы все величины мало менялись на расстоянии порядка ларморовского радиуса.

Рассматривая структуру фронта ударной волны, распространяющейся перпендикулярно к магнитному полю в разреженной плазме, будем считать, что всюду внутри фронта выполнено условие малости ларморовского радиуса по сравнению с любым характерным размером. Рассмотрим более простой случай «холодной» плазмы ( $\rho \ll H^2/8\pi$ ). Пусть механизмом затухания будет некоторое условно введенное трение между ионами и электронами. Его конкретный механизм (при определенных условиях он может быть связан с аномальным сопротивлением) обсудим позже. Задача заключается в том, чтобы составить систему дифференциальных уравнений для величин, характеризующих плазму и самосогласованные электромагнитные поля внутри фронта ударной волны, и исследовать ее. Введем систему координат, в которой фронт волны покоится; магнитное поле направим по оси  $z$ ; пусть  $zy$  — плоскость фронта. Электрический ток переносится электронами в направлении  $y$  (рис. 2.66). Инерция электронов в этом направлении будет существенно влиять на структуру фронта, так как она определяет отклонение закона дисперсии магнитного звука от линейного (см. § 2.6). Наконец, для простоты примем, что внутри фронта выполняется условие квазинейтральности  $n_i = n_e$ , где  $n_i$ ,  $n_e$  — плотность числа ионов и электронов в соответствии с аналогичной задачей о линейных магнитозвуковых колебаниях поперек магнитного поля (см. § 2.6).

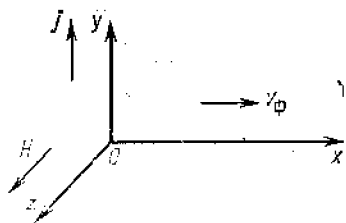


Рис. 2.66. Система координат для рассмотрения процессов внутри фронта ударной волны

В набор величин, определяющих плазму и поля, входят:  $n$ ,  $H$ ,  $u_x$  (скорость плазмы в направлении распространения волны, т. е. по оси  $x$ ),  $u_y$  (скорость электронов, переносящих ток),  $E_y$  (напряженность электрического поля вдоль оси  $y$ ). Поле  $E_x$  можно исключить, пользуясь условием квазинейтральности. В системе отсчета, где фронт волны покоится, для этих пяти неизвестных имеется пять уравнений: 1) уравнение сохранения потока частиц; 2) уравнение сохранения потока импульса; 3) уравнение движения электронов в направлении переноса электрического тока — по оси  $y$ ; 4) и 5) уравнения Максвелла для соответствующих компонент  $\text{rot } E$  и  $\text{rot } H$ . Исходную систему после несложных преобразований можно свести к дифференциальному уравнению второго порядка для одной из переменных, например  $H$ . Выпишем эти уравнения с учетом сделанных приближений:

$$\left. \begin{aligned} (d/dx) nu = 0; (d/dx) (Mnu^2/2 + H^2/8\pi) = 0; \\ mnu (du_y/dx) = -enE_y + (e/c) nuH - \nu mnu_y; \\ dE_y/dx = 0; dH/dx = (4\pi ne/c) u_y. \end{aligned} \right\} \quad (2.369)$$

Последний член в правой части уравнения движения для электронов соответствует силе трения электронного газа об ионный.

Исключая из этих уравнений все переменные, кроме  $H$ , можно получить одно уравнение второго порядка для  $H$ . Если на время не учитывать вклад силы трения, это уравнение примет вид (с точностью до членов с  $m_e/m_i$ )

$$\begin{aligned} -\frac{mc^2}{4\pi n_0 e^2 v_\phi} \frac{d}{dx} \left[ \frac{dH}{dx} \left( \frac{H^2 - H_0^2}{8\pi n_0 m_i v_\phi} - v_\phi \right) \right] \left( \frac{H^2 - H_0^2}{8\pi n_0 m_i v_\phi} - v_\phi \right) = \\ = \left( \frac{H^2 - H_0^2}{8\pi n_0 m_i v_\phi} - v_\phi \right) H + v_\phi H_0. \end{aligned} \quad (2.370)$$

Это уравнение определяет профиль изменения  $H$  в исследуемой установившейся волне. Интегрируя один раз, приведем его к виду

$$-a^2 H'^2 \left( \frac{H^2 - H_0^2}{8\pi n_0 m_i v_\phi} - v_\phi \right)^2 = \frac{(H^2 - H_0^2)^2 - 16\pi n_0 m_i v_\phi^2 (H - H_0)^2}{16\pi n_0 m_i} + C; \quad (2.371)$$

(здесь  $a^2 = m_e c^2 / 4\pi n_0 e^2 = c^2 / \omega_{pe}^2$ ). В зависимости от выбора константы интегрирования  $C$  мы получаем различные решения. Удобно проследить за характером решений в зависимости от  $C$ , построив (рис. 2.67) интегральные кривые на фазовой плоскости  $(H, H')$ .

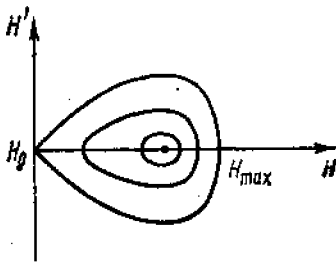


Рис. 2.67. Фазовые кривые для нелинейных магнитозвуковых волн

Решения уравнения (2.371) должны описывать периодические волны конечной амплитуды (кноидальные волны). Исключение составляет решение, соответствующее частному случаю  $C=0$ . Этот случай относится к решению типа магнитозвукового солитона. Действительно, такой выбор соответствует условию  $dH/dx=0$  при  $H=$

$=H_0$ . При этом уравнение принимает вид

$$\begin{aligned} \pm a \frac{dH}{dx} = \frac{(H - H_0)}{(H^2 - H_0^2)/8\pi n_0 m_i v_\phi - v_\phi} (16\pi n_0 m_i)^{-1/2} \times \\ \times \sqrt{16\pi n_0 m_i v_\phi^2 - (H + H_0)^2}. \end{aligned} \quad (2.372)$$

Если выбрать определенный знак перед корнем в равенстве (2.372), то получим, что нельзя построить физически разумное решение для  $H$  на всей оси  $x$ . Однако существуют решения всюду

непрерывные (до второй производной включительно), в которых при некоторых  $x=x_1$  производная  $H'$  меняет знак. В этой точке  $H$  достигает своего максимального значения  $H_{\max}$ . Уравнение  $(dH/dx)(x_1)=0$  связывает амплитуду магнитного поля  $H_{\max}$  со скоростью распространения волны и играет роль, аналогичную дисперсионному уравнению

$$16\pi n_0 m_i v_\phi^2 - (H_{\max} + H_0)^2 = 0. \quad (2.373)$$

Отсюда находим для скорости солитона

$$v_\phi^2 = (H_{\max} + H_0)^2 / 16\pi n_0 m_i. \quad (2.374)$$

В предельном случае малых амплитуд ( $H_{\max} \rightarrow H_0$ ) находим скорость магнитного звука.

Характерный пространственный масштаб солитона  $\delta \sim c/\omega_{pe}$ , что соответствует длинам волн, при которых появляется дисперсия фазовой скорости. Простое аналитическое выражение для профиля магнитного поля в уединенной волне легко получить для малых амплитуд ( $H_{\max} - H_0 < H_0$ ). Оно имеет вид

$$H = H_0 \left\{ 1 + 2 \left( \frac{v_\phi^2}{(H_0^2 / \sqrt{4\pi n_0 m_i})^2} - 1 \right) \operatorname{sh}^2 \left( \frac{x}{c/\omega_{pe}} \sqrt{\frac{v_\phi^2}{(H_0 / \sqrt{4\pi n_0 m_i})^2} - 1} \right) \right\}. \quad (2.375)$$

На рис. 2.68 показаны профили солитона для различных значений числа Маха  $M = v_\phi [H_0 / \sqrt{4\pi n_0 m_i}]^{-1}$ .

Решение солитонного типа исчезает при достаточно больших  $v_\phi$  и  $H$ . Критической является амплитуда  $H_{\max} = 3H_0$  (т. е.  $v_\phi = 2H_0 / \sqrt{4\pi n_0 m_i}$ ). При приближении амплитуды волны к критической плотность ионов на гребне волны стремится к бесконечности. Физически это означает следующее. Уединенная волна представляет собой «горб» электрического потенциала  $\phi$ . В системе координат, связанной с волной, поток ионов из  $x = \infty$  набегает на этот потенциальный барьер со скоростью  $v_\phi$ . При не слишком больших амплитудах начальная кинетическая энергия иона  $m_i v_\phi^2 / 2$  превышает высоту потенциального барьера  $e\phi_{\max}$ , и ионы, несколько задержавшись, переваливают через него. Однако, как следует из решения, с ростом амплитуды волны потенциальный барьер становится настолько высоким, что  $e\phi_{\max} > m_i v_\phi^2 / 2$ . Момент  $e\phi_{\max} \approx m_i v_\phi^2 / 2$  соответствует амплитуде  $H_{\max} = 3H_0$  (иначе говоря, критическое число Маха равно двум). На гребне такой

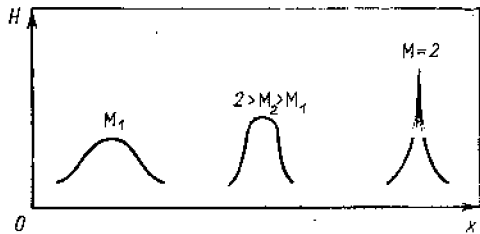


Рис. 2.68. Профили магнитозвуковых солитонов для различных чисел Маха

волны ионы, потеряв скорость, «останавливаются», а их плотность возрастает до бесконечности. При еще больших амплитудах ионы просто «отражались» бы от барьера, но соответствующее такой картине движение уже не описывается в рамках рассмотренной исходной системы уравнений, так как после отражения течение становится «многопоточковым» (взаимопроникающие потоки набегающих и отраженных ионов).

Таким образом, видим, что, как и для ионно-звуковых волн (см. § 1.20), эффекты дисперсии не могут остановить «опрокидывание» магнитного звука с достаточно большой амплитудой в холодной плазме.

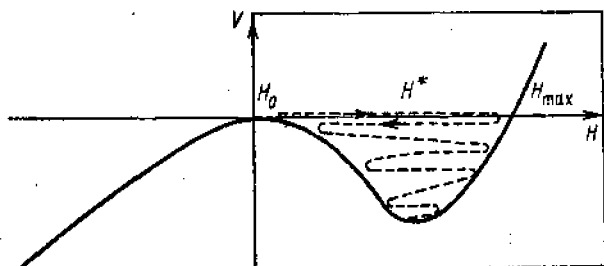


Рис. 2.69. Эффективная потенциальная яма для магнитозвуковых солитонов и ударной волны

Если бы мы учли тепловой разброс скоростей ионов, то даже при малых амплитудах волны могли бы найтись ионы, отражающиеся от барьера (это ионы с малой относительной скоростью  $v_{\phi} - v_x$ ), т. е. двигавшиеся первоначально в направлении распространения волны со скоростью, близкой к  $v_{\phi}$ ; их можно назвать резонансными. Они дают лишь один из возможных механизмов диссипации, который мал, если мало число резонансных ионов.

Другой механизм диссипации дает сила трения электронов об ионы. Для волн небольшой амплитуды анализ можно упростить и посмотреть, к чему приводит диссипация. Вместо (2.370) в этом случае имеем

$$-a^2 \frac{d^2 H}{dx^2} = H_0 - H + H \frac{H^2 - H_0^2}{8\pi m_i n_0 v_{\phi}^2} + \frac{a^2}{v_{\phi}} v \frac{dH}{dx}. \quad (2.376)$$

Рассуждая, как и в § 1.20, видим, что уравнение (2.376) представляет собой уравнение движения ангармонического осциллятора при наличии трения, роль обобщенной координаты здесь играет  $H$ , роль времени  $x$ .

Форма ямы определяется потенциалом

$$V(H) = (1/2) (H - H_0)^2 [(H + H_0)^2 / 16\pi n_0 m_i v_{\phi}^2 - 1]. \quad (2.377)$$

На рис. 2.69 изображен вид функции  $V(H)$ . При

$$H = H^* = -H_0/2 + \sqrt{8\pi n_0 m_i v_{\phi}^2 + H_0^2}/4$$

$H$  достигает минимума. Аналогия с осциллятором легко позволяет установить профиль  $H$  внутри фронта ударной волны;  $H$  осциллирует вокруг значения  $H^*$  с затухающей амплитудой до тех пор, пока не установится  $H = H^*$ , соответствующее магнитному полю позади фронта ударной волны. Для того чтобы  $H_0$  соответствовало минимуму магнитного поля в волне, т. е. чтобы  $V(H)$  имело вид, изображенный на рис. 2.69, необходимо, чтобы выполнялось условие  $v_{\phi}^2 > H_0^2/4\pi n_0 m_i$ .

Профиль изменения  $H$  внутри фронта волны можно представить следующим образом (рис. 2.70). Сначала в невозмущенной плазме появляется солитон, на гребне которого магнитное поле достигает максимального значения; вследствие наличия необратимой диссипации (трение или резонансные ионы) состояние плазмы после прохождения такой волны будет отличаться от исходного. На расстоянии порядка

$$\delta \approx (a/\sqrt{M-1}) \ln [(v_{\phi}/va)\sqrt{M-1}] \quad (2.378)$$

(число Маха  $M = v_{\phi}/v_A$ ) вслед за первой волной движется вторая волна и т. д. Если не интересоваться тонкой структурой осцилляций во фронте ударной волны и усреднить магнитное поле по расстояниям, превышающим  $\delta$ , то можно говорить о  $\delta$  как об эффективной толщине фронта ударной волны, связывающей два состояния плазмы: невозмущенной (до прихода волны) и возмущенной (модулированной интенсивными колебаниями), вклад которых при таком подходе нужно включить в законы сохранения на «разрыве». В этом смысле роль затухания действительно часто символическая, так как в выражение для  $\delta$  (2.378) (ширина такой ударной волны) затухание входит под знаком логарифма.

Картина затухания нелинейных осцилляций позади фронта ударной волны имеет следующий характер. В последующих «уединенных» волнах амплитуда все уменьшается и расстояние между двумя соседними «возвышениями» магнитного поля сокращается до  $a/\sqrt{M-1}$ , когда совокупность возвышений и впадин становится затухающей синусоидой. Полная длина затухания осцилляций будет порядка  $v_{\phi}/v$  или  $\sqrt{(H^2/8\pi lT)(m_e/m_i)}\lambda$  ( $\lambda$  — длина свободного пробега электронов).

При достаточно большой силе трения (частота столкновений  $\bar{v}$ )

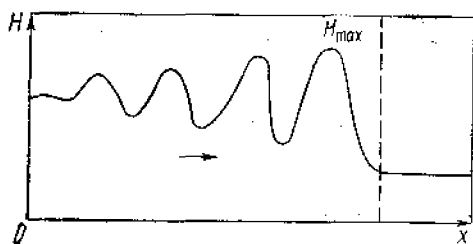


Рис. 2.70. Осцилляторная структура магнитно-звуковой ударной волны

При достаточно большой силе трения (частота столкновений  $\bar{v}$ )

характер решения уравнения (2.376) полностью меняется. Этот случай в бесстолкновительной плазме очень важен при аномальном сопротивлении. До сих пор мы считали затухание [последний член в уравнении (2.376)] малым. В противоположность этому случаю при  $c/\omega_{pe} \ll c^2 m_e v / 4\pi l e^2 v_\phi$  можно пренебречь дисперсией, т. е. членом со второй производной в (2.376). Толщина фронта ударной волны тогда дается выражением

$$\Delta \sim c^2 / 4\pi \sigma_\phi (M-1). \quad (2.379)$$

Конкретную величину  $\Delta$  получим, если для  $\sigma$  воспользуемся выражением из теории аномального сопротивления при ионно-звуковой неустойчивости.

До сих пор речь шла о структуре волны, распространяющейся строго поперек магнитного поля. Нетрудно обобщить предыдущее рассмотрение на случай волн, не перпендикулярных к  $H$ . Дисперсионные эффекты резко чувствительны к направлению распространения волны. Если волна распространяется не строго поперечно, то характерной длиной дисперсии является  $(c/\omega_{pi})\theta$  (при  $\sqrt{m_e/m_i} \ll \theta \ll 1$ ). Инерция электронов для таких волн незначительна, но зато учитывается гиротропия плазмы. Уравнение для  $H$  в этом случае можно угадать из простых соображений о роли дисперсии. Действительно, для этого достаточно в уравнении (2.376) под длиной дисперсии  $a$  понимать  $(c/\omega_{pi})\theta$ . В результате получим для  $H$  следующее уравнение:

$$\frac{c^2}{\omega_{pi}^2} \theta^2 \frac{d^2 H}{dx^2} = H \left\{ 1 + \frac{H_0^2}{8\pi n_0 m_i v_\phi^2} - \frac{H^2}{8\pi n_0 m_i v_\phi^2} \right\} - H_0 + a \frac{dH}{dx}. \quad (2.380)$$

Но здесь меняется не только длина, но и характер дисперсии ( $\omega/k$  с ростом  $k$  увеличивается). В уравнении (2.380) изменился знак

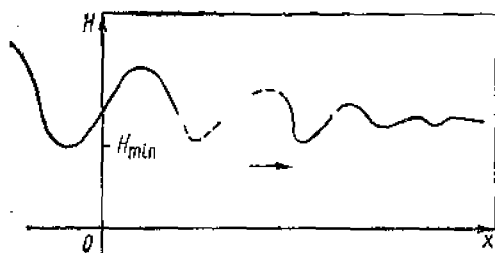


Рис. 2.71. Осцилляционная структура «коксой» ударной волны

«эффективной массы». В пренебрежении затуханием  $a dH/dx$  мы снова имеем нелинейные периодические установившиеся волны. Особым решением и здесь являются уединенные волны, но в этом случае это уединенные волны «разрежения» (рис. 2.71). Профиль же ударной волны будет иметь вид, показанный на рис. 2.71.

Любопытно, что внутри фронта ударной волны магнитное поле достигает минимального значения, меньшего, чем в невозмущенной плазме. Отличие от предыдущего случая заключается и в том, что передний фронт осцилляций не является резким.

Таким образом, задача о ламинарной структуре нелинейных осцилляций внутри фронта ударных волн сводится к двум различ-

ным постановкам (рис. 2.72): 1) когда дисперсионная кривая  $\omega(k)$  имеет вид типа I (волны, перпендикулярные к  $H$  в холодной плазме); в этом случае передний фронт осцилляций резкий (все начинается с солитонов) и 2) когда короткие волны имеют большую скорость распространения, чем длинные (тип II). В этом случае передний фронт осцилляций вытягивается, так как короткие волны обгоняют фронт. Для существования бесстолкновительной ударной волны здесь уже необходимо аномальное затухание таких осцилляций.

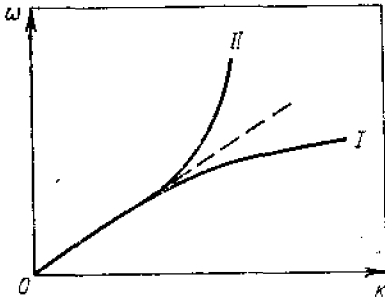


Рис. 2.72. Два предельных случая законов дисперсии

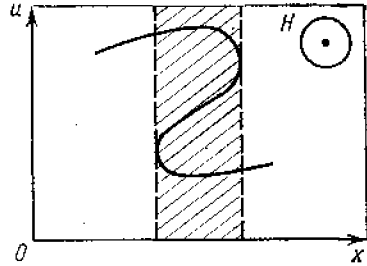


Рис. 2.73. Образование многопоточкового движения в ударных волнах при больших числах Маха

Мы еще совсем не разбирали случаев, когда ламинарную теорию фронта ударной волны вообще невозможно построить. Такая ситуация в уже приведенных выше примерах осуществляется при достаточно больших амплитудах, когда нет установившихся нелинейных волн. Рассмотрим сначала случай, когда ударная волна идет поперек сильного магнитного поля в холодной плазме. При приближении амплитуды магнитного поля в волне к значению, втрое большему начального магнитного поля, ламинарная структура нарушается. Физически это означает, что как только амплитуда волны достигает критического значения ( $H_{\max} = 3H_0$ ), происходит «опрокидывание». В некотором участке пространства ионы, двигавшиеся первоначально позади, настигают передние и обгоняют их (рис. 2.73). Профиль скорости в этом случае становится многозначным.

Заметим, что аналогичное явление хорошо изучено в теории волн конечной амплитуды на поверхности тяжелой жидкости в канале конечной глубины. Здесь существуют нелинейные установившиеся движения типа уединенных или периодических волн. При достаточно больших амплитудах такие волны разрушаются вследствие «опрокидывания». Ясно, что строгий математический анализ картины, возникающей после опрокидывания, чрезвычайно труден. Можно попытаться лишь качественно установить наиболее существенные черты явления, проводя аналогию с волнами в жидкости.

Основной вопрос состоит в том, будет ли после опрокидывания движение плазмы стремиться к какому-либо установившемуся ре-



жиму или же переходная область (заштрихованная, см. рис. 2.73) будет неограниченно размываться, как это имело бы место в обычной газе без столкновений. В теории поверхностных волн через некоторое время после опрокидывания возникает установившееся течение, называемое прыжок воды или бор, представляющее собой некоторую переходную область конечной толщины, которая обычно заменяется идеализированной математической поверхностью, разделяющей два плоскопараллельных потока. При переходе через эту поверхность удовлетворяются соответствующие законы сохранения. В известном смысле «бор» представляет собой аналог ударной волны. Стационарность ширины переходного слоя физически обеспечивается тем, что участки профиля, выдвигающиеся вперед при опрокидывании, в конце концов, описав дугу, под действием силы тяжести падают и «смешиваются» с покоившимися. В плазме роль силы тяжести выполняет магнитное поле, заворачивающее ионы. Хотя распределение их по скоростям еще далеко от максвелловского, состояния плазмы с обеих сторон переходной области можно связывать законами сохранения потоков массы, импульса и энергии. Ширину переходной области можно оценить как радиус кривизны ионов после опрокидывания в магнитном поле. Так как в волне с числом Маха большим двух амплитуда скорости  $v \gg v_A$ , то ширина переходного слоя (или ширина бесстолкновительной ударной волны)  $\delta \sim m_i c / e H \sim c / \omega_{pi}$ .

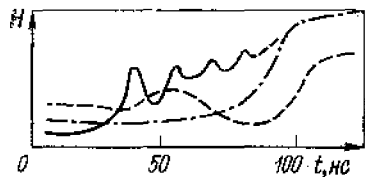
Однако многоскоростное течение со скоростями, перпендикулярными к магнитному полю, возникающее после опрокидывания, должно быть неустойчиво. Действительно, если для простоты рассмотреть двухпучковое распределение ионов при разности скоростей пучков, превышающей тепловую скорость, то возникает неустойчивость относительно раскачки колебаний с волновым вектором, почти параллельным скорости пучка. В «боре» также имеет место неустойчивость сходной природы (встречные потоки); это просто неустойчивость тангенциального разрыва, возникающая при соприкосновении падающей струи с поверхностью покоившейся жидкости. В случае же двух встречных ионных потоков, движущихся поперек магнитного поля, двухпотоковая неустойчивость сильнее всего развивается при частотах порядка нижней гибридной. Максимальный инкремент неустойчивости по порядку величины также равен  $(\omega_{pi} \omega_{pe})^{1/2}$ . Таким образом, плазма турбулизуется. В отличие от аномального сопротивления такая турбулентность приводит к аномальной вязкости.

Большое разнообразие типов структур фронта бесстолкновительных ударных волн, соответствующее описанным выше моделям, наглядно иллюстрируется лабораторными экспериментами (рис. 2.74) и измерениями ударных волн в солнечном ветре (рис. 2.75).

Выше мы рассмотрели вопрос о бесстолкновительных турбулентных ударных волнах в плазме, распространяющихся поперек

или почти поперек сильного магнитного поля. Магнитное поле удерживает более «горячие» частицы, предотвращая расплывание переходной области между невозмущенной (холодной) плазмой (перед фронтом ударной волны) и нагретой плазмой за волной. Если такого поля нет или его направление совпадает с направлением движения ударной волны, то невозможно предотвратить взаимопроникновение горячей и холодной плазм. Происходит как бы инжекция одной плазмы в другую. Так, время от времени солнеч-

Рис. 2.74. Типичные профили бесстолкновительных ударных волн, генерируемых в лабораторной плазме с помощью метода «магнитного поршня» (при быстром нарастании магнитного поля):

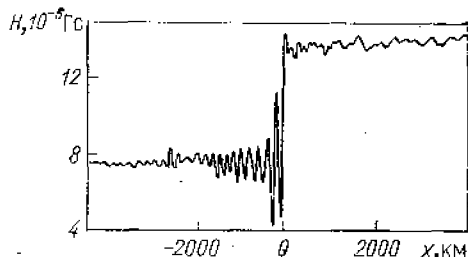


— волна, распространяющаяся перпендикулярно к магнитному полю (плотность плазмы мала  $\sim 5 \cdot 10^{12}$ ; аргон;  $H_0 \sim 1$  кГс). Внутри фронта волны токовая скорость электронов превышает тепловую. Однако даже неустойчивость Бунемана не успевает развиться; — «косая» ударная волна ( $\theta > 10^\circ$ ); — волна, распространяющаяся перпендикулярно к магнитному полю в плазме с плотностью  $n > 10^{13}$  см $^{-3}$  (режим аномального сопротивления). (Алиханов С. Г. и др. — In: «Plasma Phys. and Controlled Nucl. Fus. Res.», v. 1, Internat. Atomic Energy Agency, Vienna, 1969, p. 47)

ная корона выбрасывает с большой скоростью огромные массы горячей плазмы, которые, попадая в межпланетную плазму, создают бесстолкновительные ударные волны. Проблема здесь заключается в том, чтобы найти механизмы, способные остановить свободное растекание инжектируемого сгустка плазмы в межпланетной среде.

Рассмотрим несколько более подробно лишь наиболее понятный механизм, связанный с развитием «шланговой» неустойчивости. Пусть поток плазмы инжектируется вдоль невозмущенного магнит-

Рис. 2.75. Профиль магнитного поля во фронте косой ( $\theta \approx 60^\circ$ ) межпланетной ударной волны с числом Маха  $M=2,5$  по измерениям на борту спутника ISEE 26 октября 1977 г.



Большое значение отношения газодинамического давления к магнитному ( $\beta \approx 3$ ) способствует устойчивости уходящей вперед осцилляционной структуры. Толщина ударного фронта  $\Delta \sim 90$  км, что составляет примерно  $2c/\omega_{pe}$  (Russel C. T., Greenstadt E. W. — «Report of Inst. of Geophys. and Planet Phys.», 1978, № 1847)

ного поля. Тогда в каждом элементе объема полное распределение частиц можно представить в виде суперпозиции невозмущенной плазмы и возмущенных частиц, втекающих в данный элемент объема. Такое распределение является, очевидно, анизотропным с параллельным давлением, нарастающим быстрее, чем перпендикулярное давление. При анизотропии давления, превышающей пороговое значение  $\Delta p > H^2_0/4\mu$ , развивается «шланговая» неустойчивость, существенно влияющая на дальнейшее растекание плазмы.

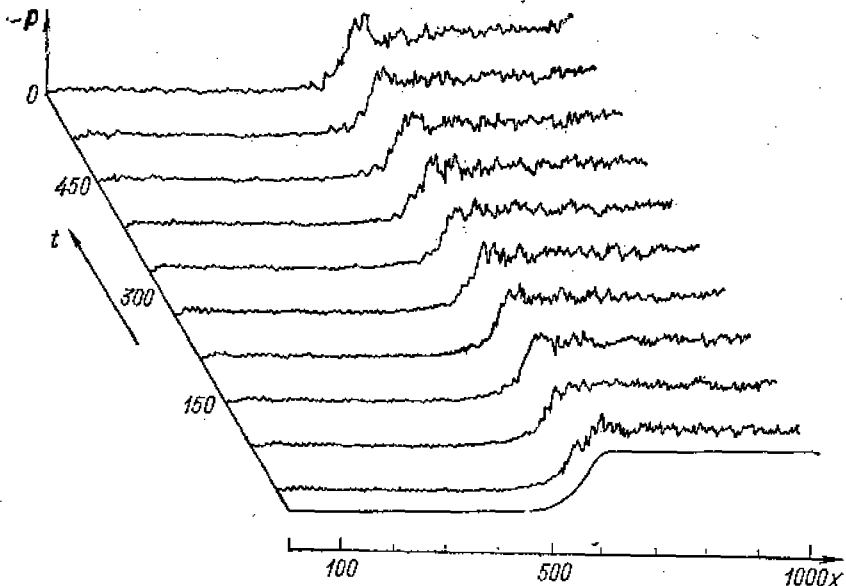


Рис. 2.76. Структура бесстолкновительной ударной волны, распространяющейся параллельно магнитному полю в плазме с большим  $\beta$  (H. Völk, D. Auer, 1971). Показаны профили плотности в волне в различные времена  $t$ ; расстояние измеряется в ионных ларморовских радиусах, время — в обратных частотах ларморовского вращения ионов. Вследствие сжатия на фронте волны продольное давление ионов превышает поперечное. Развивающаяся при этом шланговая неустойчивость создает эффективную диссипацию в ударной волне, препятствующую укрупнению ее профиля. Создается квазистационарная структура фронта шириной порядка нескольких ионных ларморовских радиусов

Вследствие развития «шланговой» неустойчивости магнитные силовые линии будут извиваться беспорядочным образом, так что магнитное поле становится турбулентным. Обратное влияние этой турбулентности на растекание частиц учитывается квазилинейными уравнениями для функций распределения частиц. С точки зрения сохранения адиабатических инвариантов

$$\mu = mv_{\perp}^2 / 2H \text{ и } J = \oint dt v_{\parallel}$$

( $dl$  — длина элемента силовой линии магнитного поля) по мере нарастания турбулентного магнитного поля уменьшается продольное и увеличивается поперечное давление плазмы. Иными словами, рассеяние частиц на нерегулярностях магнитного поля играет роль эффективных соударений, приводящих к изотропизации давления плазмы.

Аналитическая теория этого явления построена для слабых ударных волн. В общем же случае используют численное моделирование (рис. 2.76). Толщина ударной волны без столкновений оказывается, как и следовало ожидать из размерностных соображений, порядка нескольких ларморовских радиусов иона.

## § 2.21. Генерация и усиление магнитного поля

До сих пор, рассматривая поведение плазмы в магнитном поле, мы молчаливо считали, что само существование последнего задается извне внешними источниками, хотя, разумеется, принималось во внимание влияние электрических токов, текущих по плазме.

В астрофизических приложениях невозможно обойти вопрос о происхождении исходного магнитного поля. Оказывается, магнитная гидродинамика сама по себе способна объяснить, каким образом движение проводящей среды (будь то плазма или расплавленный металл) генерирует магнитное поле. В основе механизма генерации магнитного поля, так называемого динамо-процесса, лежит явление растягивания магнитных силовых линий при

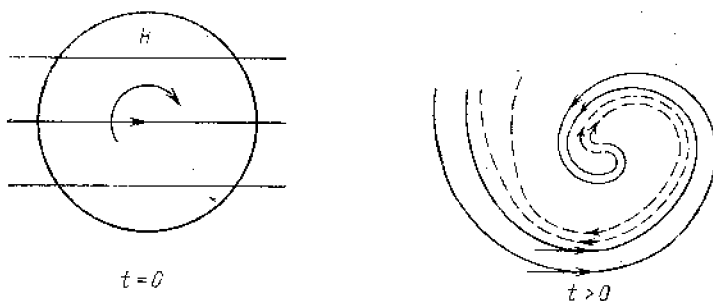


Рис. 2.77. Схема усиления магнитного поля в процессе дифференциального вращения плазмы вместе с вмороженными силовыми линиями

движению проводящего вещества вместе с вмороженными в него силовыми линиями магнитного поля. В частности, при турбулентном движении плазмы различные точки, пронизываемые силовой линией, со временем удаляются друг от друга, приводя к растягиванию и запутыванию силовых линий. При этом, однако, возникают сильные градиенты магнитного поля, а в некоторых областях даже образуются конфигурации со встречным направлением магнитного поля. Поэтому ясно, что в таких конфигурациях становится важной диссипация поля из-за взаимной диффузии («аннигиляции», по терминологии § 2.15 о тиринг-моде) магнитных силовых линий. Эти же процессы мешают усилению поля в случае растягивания силовых линий в процессе регулярного движения в одной плоскости. Классическим примером ламинарного движения такого рода является дифференциальное вращение, когда силовые линии, соединяющие две точки, лежащие на различном расстоянии по радиусу от оси вращения, со временем растягиваются в спирали (рис. 2.77). Из-за условия  $\text{div } \mathbf{H} = 0$  число силовых линий, направленных по спирали к оси вращения, должно быть равным числу силовых линий, уходящих по спирали от оси вращения. Поэтому при сильном закручивании спиралей пучки силовых линий, имею-

щие противоположные направления (к оси и от оси), находятся на близком расстоянии друг от друга и быстро аннигилируют вследствие взаимной диффузии полей. Кроме того, обратное воздействие сил натяжения магнитных силовых линий на вращающуюся плазму рано или поздно приводит к ее торможению, т. е. к прекращению дальнейшего усиления поля.

Невозможность длительного усиления поля в двумерном случае нетрудно доказать и на математическом языке. Для этого воспользуемся уравнением (2.70) для магнитного поля с учетом движения проводящей плазмы. Это уравнение является основным в теории так называемого кинематического динамо, в которой движение (поле скорости  $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$ ) задано. В двумерном случае удобно вместо напряженности магнитного поля ввести векторный потенциал

$$\mathbf{H} = \text{rot } \mathbf{A}. \quad (2.381)$$

В случае двумерного движения в плоскости  $(x, y)$  векторный потенциал имеет только одну компоненту вдоль оси  $z$ , так что уравнение (2.70) сводится к виду

$$\partial A_z / \partial t + (\mathbf{u} \nabla) A_z = (c^2 / 4\pi\sigma) \Delta A_z. \quad (2.382)$$

Второй член в левой части (2.382) описывает усиление магнитного поля при движении его силовых линий с плазмой, а правая часть учитывает диффузию магнитных силовых линий. Эффект усиления доминирует при условии  $4\pi\sigma VL \gg 1$ , где  $V, L$  — характерные скорость и масштаб движения соответственно. Однако само усиление не может длиться бесконечно долго, так как в таком процессе не создается новых силовых линий, а старые в конечном счете должны исчезнуть в результате взаимной диффузии. Последнее нетрудно понять из аналогии (замеченной Я. Б. Зельдовичем) уравнения (2.382) с уравнением теплопроводности, которое, как известно, имеет только одно стационарное решение, соответствующее  $A_z = \text{const}$ .

Учитывая огромные пространственные масштабы, характерные для космической плазмы, и ее достаточно высокую проводимость, можно показать, что для нее условия усиления поля часто выполняются с хорошим запасом. В качестве классического примера обычно ссылаются на Крабовидную туманность, магнитное поле которой, по-видимому, претерпело эволюцию указанного типа. Сценарий должен выглядеть примерно так. Около тысячи лет назад в результате взрыва сверхновой в центре Крабовидной туманности образовалась нейтронная звезда, вращающаяся с угловой частотой порядка 30 об/с, а внешняя проводящая оболочка старой звезды была сброшена и разлетается теперь примерно со скоростью 1500 км/с. В результате магнитные силовые линии, замороженные, с одной стороны, в разлетающуюся оболочку, а с другой, в быстро вращающуюся нейтронную звезду, за время, прошедшее с момента взрыва, должны были совершить  $N \approx 30 \text{ об/с} \times 3 \cdot 10^{10} \approx 10^{12}$  об. Магнитный поток, пронизывающий старую звезду, по-видимому, по

порядку величины составлял величину, равную потоку через такую типичную звезду, как наше Солнце, т. е.

$$\psi = 2\pi R_{\odot}^2 B_{\odot} \approx 10^{23} \text{ Гс} \cdot \text{см}^2,$$

где  $B_{\odot} \approx 1 \text{ Гс}$  — среднее по поверхности магнитное поле Солнца, а  $R_{\odot} = 7 \cdot 10^6 \text{ км}$  — радиус Солнца. Если теперь предположить, что примерно один процент этого потока остался вмороженным в разлетающуюся оболочку, то к настоящему моменту магнитный поток, пронизывающий Крабовидную туманность, с учетом многократного закручивания силовых линий составит около  $10^{23} \text{ Гс} \cdot \text{см}^2$ .

Учитывая, что размер Крабовидной туманности примерно равен расстоянию, которое пролетела оболочка за тысячу лет, т. е. примерно  $3 \cdot 10^{18} \text{ см}$ , находим магнитное поле в Крабовидной туманности  $H = 10^{-4} \text{ Гс}$ . Оценка синхротронного излучения энергичных электронов в таком магнитном поле дает поток энергии излучения, по порядку величины совпадающий с наблюдаемым. Сторонники такой модели считают это аргументом в пользу изложенной простой модели усиления поля.

Точно так же, как и для плоского движения, было доказано, что и некоторые другие регулярные движения, обладающие высокой симметрией, не могут усиливать и поддерживать поля в течение длительного времени. К такого рода движениям относится дифференциальное вращение проводящего ядра вместе с вмороженным в него полоидальным магнитным полем. Дифференциальное вращение ядра (обычно более быстрое в центре) приводит к закручиванию в тор полоидальных магнитных силовых линий (рис. 2.78). Напряженность торoidalного поля при этом растет линейно со временем, так как каждый новый оборот силовых линий увеличивает магнитный поток через меридиональную плоскость. Однако полоидальное поле при этом экспоненциально затухает

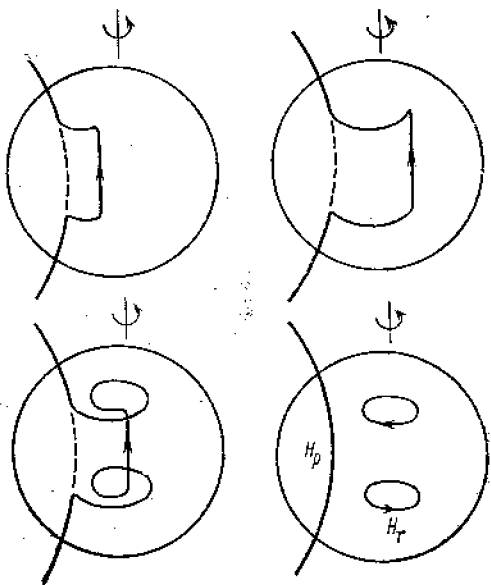


Рис. 2.78. Генерация торoidalного поля при дифференциальном вращении проводящей среды с вмороженным в нее полоидальным магнитным полем

из-за магнитной вязкости (диффузии силовых линий). В конце концов начнет затухать и тороидальное поле. Следовательно, чтобы генерировать стационарное магнитное поле, нужно найти подходящий механизм поддержания именно полоидального магнитного поля. Более того, это поле важно для объяснения дипольного магнитного поля некоторых планет и звезд. Что же касается внутреннего тороидального поля, то его наличие не сказывается на характере внешнего поля.

Буллард и Эльзассер предложили в качестве такого механизма использовать преобразование тороидального магнитного поля в полоидальное в процессе конвекции проводящей среды. Такое движение дополняет уже рассмотренное неоднородное вращение и снимает цилиндрическую симметрию задачи. Возникновение же конвекции, например в ядре Земли и в атмосферах звезд, является результатом обычной гидродинамической неустойчивости среды, подогреваемой снизу в поле тяжести. Рассматривая процесс подъема петли тороидального поля в восходящих конвекционных потоках, можно показать, что силы Кориолиса поворачивают такую петлю в меридиональную плоскость и таким образом поддерживают полоидальное магнитное поле. Итак, в системе полоидальное поле + тороидальное возникает обратная связь. Ю. Паркер предложил феноменологические уравнения, реализующие обратную связь между полоидальным  $H_P$  и тороидальным  $H_T$  полями. Эти уравнения имеют следующий наглядный вид:

$$\left. \begin{aligned} \partial H_T / \partial t &= \Gamma_R H_P + (c^2 / 4\pi\sigma) \Delta H_T; \\ \partial H_P / \partial t &= \Gamma_C H_T + (c^2 / 4\pi\sigma) \Delta H_P, \end{aligned} \right\} \quad (2.383)$$

где  $\Gamma_R$  — коэффициент генерации тороидального магнитного поля из полоидального вследствие дифференциального вращения, а  $\Gamma_C$  — коэффициент генерации полоидального поля из тороидального вследствие конвекции. Нетрудно убедиться, что в пределе слабой диффузии эти уравнения описывают экспоненциальное нарастание полей во времени при условии, что знаки коэффициентов связи полоидального и тороидального полей одинаковы:

$$H_{T,P} \sim \exp(\gamma t); \quad \gamma^2 = \Gamma_R \Gamma_C. \quad (2.384)$$

Задачу о генерации магнитного поля планет и звезд в строгой аналитической постановке решить не так-то просто. Поэтому часто пользуются численными методами, предложенными еще Буллардом и Эльзассером. Однако задача о генерации магнитного поля значительно упрощается в случае, когда турбулентное движение с мелкими масштабами возбуждает существенно более гладкое магнитное поле. Тогда в разложениях Фурье поля скоростей и магнитного поля главные вклады определяются совершенно разными

масштабами. Это означает, что в формулах Фурье-разложения

$$\mathbf{u}(\mathbf{r}, t) = \int \mathbf{u}_{\mathbf{k}}(t) \exp(i\mathbf{k}\mathbf{r}) d^3\mathbf{k}; \quad (2.385)$$

$$\overline{\mathbf{H}}(\mathbf{r}, t) = \int \overline{\mathbf{H}}_{\mathbf{q}}(t) \exp(i\mathbf{q}\mathbf{r}) d^3\mathbf{q}, \quad (2.386)$$

следует иметь в виду, что  $q^2 \ll k^2$ . По этой причине имеет смысл усреднение магнитного поля по мелкомасштабному движению среды (черта сверху над  $\mathbf{H}(\mathbf{r}, t)$ ).

Итак, существенное различие масштабов позволяет представить магнитное поле в виде суммы медленно меняющегося («крупномасштабного») поля  $\overline{H}$  и мелкомасштабных флуктуаций  $\mathbf{h}$  (являющихся мгновенным откликом на движение среды). Здесь полезно отметить некоторую аналогию с квазилинейным приближением (§ 1.17). Представим магнитное поле в виде

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \overline{\mathbf{H}}(\mathbf{r}, t) + \mathbf{h}(\mathbf{r}, t). \quad (2.387)$$

Из уравнения (2.70) нетрудно получить уравнение для быстро меняющейся части

$$\partial \mathbf{h} / \partial t = \text{rot} [\mathbf{u} \times \overline{\mathbf{H}}] + \Delta \mathbf{h} c^2 / 4\pi\sigma. \quad (2.388)$$

Воспользуемся медленностью изменения  $\overline{\mathbf{H}}$  по сравнению с  $\mathbf{v}$ . Считая для простоты, что магнитная вязкость достаточно велика, перепишем это уравнение в виде

$$(\overline{\mathbf{H}} \cdot \nabla) \mathbf{u} = (c^2 / 4\pi\sigma) \overline{k^2} \mathbf{h}, \quad (2.389)$$

где  $\overline{k^2}$  — некоторый средний по спектру турбулентных пульсаций скорости квадрат волнового вектора.

Уравнение для медленно меняющейся части магнитного поля получаем, усредняя уравнения (2.70) по мелкомасштабным флуктуациям, подобно тому как это делалось при выводе квазилинейного уравнения для функции распределения:

$$\partial \overline{\mathbf{H}} / \partial t = \text{rot} [\overline{\mathbf{u} \times \mathbf{h}}] + (c^2 / 4\pi\sigma) \Delta \overline{\mathbf{H}}.$$

Подставив сюда найденное выше выражение для  $\mathbf{h}$ , получим

$$\partial \overline{\mathbf{H}} / \partial t = (4\pi\sigma / c^2 \overline{k^2}) \text{rot} [\overline{\mathbf{u} \times (\overline{\mathbf{H}} \cdot \nabla) \mathbf{u}}] + (c^2 / 4\pi\sigma) \Delta \overline{\mathbf{H}}. \quad (2.390)$$

Черта сверху в этом уравнении означает усреднение по турбулентным пульсациям скорости. В теории кинематического динамо поле скоростей считается заданным. Для турбулентного движения задание усредненных характеристик движения осуществляется обыч-



но с помощью корреляционной функции для скоростей

$$K_{\alpha\beta}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \overline{u_{\alpha}(\mathbf{r}) u_{\beta}(\mathbf{r}')}.$$

Так как  $\alpha, \beta = 1, 2, 3$  соответственно числу измерений в пространстве, то  $K_{\alpha\beta}$  является тензором. Естественно считать, что он зависит только от  $(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$ . Проще всего такой тензор можно представить в следующем виде:

$$K_{\alpha\beta}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = A(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \delta_{\alpha\beta} + B(\mathbf{r} - \mathbf{r}') x_{\alpha} x_{\beta} + C(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} x_{\gamma}, \quad (2.91)$$

где  $A, B$  и  $C$  — некоторые функции  $(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$ ;  $\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}$  — полностью антисимметричный единичный тензор;  $x_{\alpha}, x_{\beta}$  — компоненты радиус-вектора  $(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$ . Если положить  $\mathbf{r} - \mathbf{r}' = 0$ , то в правой части (2.391) останется только первый член. Тогда свертывание тензора по индексам  $\alpha$  и  $\beta$  дает  $\overline{v^2} = 3A(0)$ . Средний квадрат скорости является самой общей характеристикой турбулентного движения. Часто при описании изотропной турбулентности этим и ограничиваются, т. е. в правой части (2.391) сохраняют лишь член с  $A$ . Если провести усреднение в интересующем нас уравнении (2.390), сохраняя лишь вклад, содержащий  $A$ , то получится тождественный нуль. Удержание третьего члена в (2.391) придает турбулентному движению своеобразную особенность. Проведем сначала вычисления, а затем вернемся к обсуждению физического смысла. Умножая обе стороны выражения (2.390) на  $\varepsilon_{\alpha\beta\gamma} \partial/\partial x_{\gamma}$  и свертывая по индексам  $\alpha$  и  $\beta$ , получаем  $C(0) = -(1/3) (\mathbf{v} \cdot \text{rot } \mathbf{v})$ . Именно этот член дает исчезающий вклад при усреднении в рассматриваемой модели динамо. Проводя несложные выкладки, получаем

$$\partial \bar{\mathbf{N}} / \partial t = - (4\pi\sigma / c^2 k^2) (\mathbf{v} \cdot \text{rot } \mathbf{v}) \text{rot } \bar{\mathbf{N}} + (c^2 / 4\pi\sigma) \Delta \bar{\mathbf{N}}. \quad (2.392)$$

Турбулентное движение с  $(\mathbf{v} \cdot \text{rot } \mathbf{v}) \neq 0$  удобно представлять наглядно как статистический ансамбль вихрей, каждый из которых в среднем имеет преимущественное направление вращения (знак  $\text{rot } \mathbf{v}$ ) в зависимости от направления своего поступательного движения (знак  $\mathbf{v}$ ). Любопытна аналогия с поляризацией нейтрино и антинейтрино, которая, конечно, является чисто внешней.

Расписывая уравнение (2.392) по компонентам, находим, что между различными компонентами появляется обратная связь. Правда, она несколько отличается от предложенной Паркером. Итак, как это было показано Стенбеком и Краузе, гиротропная турбулентность, в которой  $(\mathbf{v} \cdot \text{rot } \mathbf{v}) \neq 0$ , способна обеспечить усиление и поддержание магнитного поля. Характерное время нарастания можно получить, оценивая коэффициент связи из уравнения (2.392) и используя выражение для темпа нарастания в упрощен-

ной модели Паркера:

$$\gamma \approx 4\pi\sigma\bar{v}^2q/c^2k. \quad (2.393)$$

Поскольку при выводе уравнения для мелкомасштабных флуктуаций магнитного поля главным считается член, описывающий диффузию поля, то на темп роста поля накладывается следующее ограничение:  $\gamma \ll c^2k^2/4\pi\sigma$ , т. е.  $c^2/4\pi\sigma \gg \sqrt{\bar{v}^2q/k^2}$ .

Наконец, выше поле скоростей считалось заданным. На самом же деле с ростом напряженности магнитного поля возрастает воздействие его на движение среды. Тем самым мы выходим за рамки кинематического приближения. Верхний предел магнитного поля, который еще можно достичь, определяется из условий приближенного равенства энергии магнитного поля и кинетической энергии плазмы.

Кроме динамо существуют механизмы генерации магнитного поля, связанные с так называемыми сторонними силами (сторонними ЭДС). Такую роль могут играть термоэлектрические эффекты в плазме. Так, в уравнении (2.69) для магнитного поля присутствует слагаемое, которое в плазме с неколлинеарными градиентами давления и температуры приводит к появлению вихревой компоненты электрического поля. Этот эффект связан с учетом сил давления в обобщенном законе Ома. В отсутствие движения среды и магнитной вязкости уравнение (2.69) принимает простой вид:

$$\partial H/\partial t = (c/en) [\nabla T_e \times \nabla n]. \quad (2.394)$$

Отсюда следует, что при неколлинеарных градиентах  $\nabla T_e$  и  $\nabla n$  в плазме самопроизвольно нарастает магнитное поле. Из общих соображений следовало бы ожидать, что магнитное поле может нарастать до тех пор, пока плотность энергии магнитного поля станет сравнимой с плотностью тепловой энергии плазмы ( $H^2/8\pi \sim nT$ ). Однако гораздо раньше магнитное поле замагничивает электроны, и поэтому в законе Ома появляются дополнительные члены, связанные с так называемой термосилой в направлении поперек градиента температуры и направления магнитного поля. Физический смысл такой термосилы и порядок ее величины можно уяснить из рис. 2.79. Здесь электроны, движущиеся из области с большей температурой в область с меньшей температурой, имеют соответственно большую длину пробега относительно кулоновских соударений. Вращаясь в магнитном поле, они передают в процессе столкновений импульс плазме в направлении поперек гради-

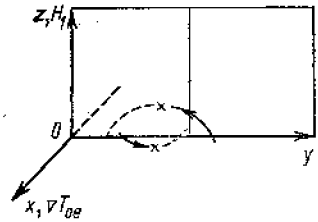


Рис. 2.79. Возникновение термосилы из-за существования разности длин пробега электронов в областях с разными температурами

ента температуры и магнитного поля, создавая термосилу порядка

$$R_T = -0,81\tau_e [\omega_{He} \times \nabla T_e],$$

где  $\omega_{He} = e\mathbf{H}/m_e c$ , а численный коэффициент можно получить из более строгой теории явлений переноса, выходящей за рамки книги. Включая эту термосилу в закон Ома (2.65), преобразуем уравнение для магнитного поля к виду

$$\partial \mathbf{H} / \partial t = 0,81 [\tau_e / m_e] \text{rot} [\mathbf{H} \times \nabla T_e] + (c/en) [\nabla T_e \times \nabla n]. \quad (2.395)$$

Дополнительный член слева можно интерпретировать как увлечение магнитного поля тепловыми потоками со скоростью

$$\mathbf{u} = -0,81\tau_e \nabla T_e / m_e. \quad (2.396)$$

Именно этот процесс оказывает стабилизирующее воздействие на рост поля и приводит к насыщению поля на уровне, определяемом по порядку величины условием  $\omega_{He} \tau_e \sim 1$ .

Здесь же следует отметить, что в плазме с первоначально коллинеарными градиентами  $n$  и  $T$  к неколлинеарности последних могут привести малые возмущения градиента температуры при наличии возмущений магнитного поля. Для того чтобы убедиться в этом, в уравнение теплопроводности следует включить так называемые косые потоки тепла (за счет явления, аналогичного эффекту Холла). В итоге получим уравнение

$$\mathbf{q}_\perp = -5,7 (n T_e \tau_e^2 / m_e) [\omega_{He} \times \nabla T_e],$$

где численный коэффициент находит обоснование в строгой теории переноса. В результате уравнение теплопроводности принимает вид

$$\begin{aligned} (3/2)n(\partial T_e / \partial t) &= 3,16 \text{div} [(n_e T_e \tau_e / m_e) \text{grad} T_e] - \\ &- 5,7 \text{div} (n_e T_e \tau_e^2 [\omega_{He} \times \nabla T_e] / m_e). \end{aligned} \quad (2.397)$$

Выбирая ось  $x$  вдоль невозмущенных градиентов  $n_0$  и  $T_{0e}$ , а возмущение магнитного поля вдоль оси  $z$  в виде  $H_z = H_1 \exp(-i\omega t + ik_y y)$ , линеаризуем уравнения (2.395) и (2.397) относительно малых возмущений:

$$\begin{aligned} -i\omega H_1 &= -(ikc T_{1e} / en_0) (\partial n_0 / \partial x); \\ -(3/2)i\omega n_0 T_{1e} &= -3,16 n_0 T_{0e} \tau_e k^2 T_{1e} / m_e - \\ &- 5,7 i k n_0 T_{0e} \tau_e^2 \Omega_1 \partial T_{0e} / \partial x m_e. \end{aligned}$$

Пренебрегая членом в левой части последнего уравнения по сравнению с членом, описывающим незамагниченную теплопроводность, и разрешая систему уравнений относительно  $H_1$ , находим, что магнитное поле нарастает экспоненциально с инкрементом

$$\gamma \approx 1,8 (\tau_e / m_e n) (\text{grad} n \cdot \text{grad} T_e). \quad (2.398)$$

Описанная выше самопроизвольная генерация магнитного поля предсказана А. Дыхне и В. Большовым в задаче о плазменной короне каплевой мишени, облучаемой лазерным светом. Подавление теплопроводности плазмы в результате роста магнитного поля су-

ущественно сказывается на гидродинамике сжатия мишени и может оказаться препятствием на пути к осуществлению лазерного термоядерного синтеза. Кроме того, если мишень облучается сферически-несимметричным потоком лазерного света, то импульс световой волны, поглощаемой электронами скин-слоя, может иметь компоненту вдоль скин-слоя. Это приводит к генерации тока электронов и соответственно магнитного поля, охватывающего область поглощения излучения. Поскольку напряженность магнитного поля при этом оказывается пропорциональной интенсивности излучения, то эффект становится существенным лишь при очень больших потоках лазерного излучения.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ \*

1. Арцимович Л. А. Управляемые термоядерные реакции. М., Физматгиз, 1960.
2. Арцимович Л. А. Замкнутые плазменные конфигурации. М., «Наука», 1969.
3. Ведынов А. А., Велихов Е. П., Сагдеев Р. З. Устойчивость плазмы.— «Успехи физ. наук», т. 73, с. 701, 1961.
4. Sagdeev R. Z., Galeev A. A. Nonlinear plasma theory. Benjamin, NY—L, 1969.
5. Альвен Х. Космическая электродинамика. Пер. с англ. М., Изд-во иностр. лит., 1952.
6. Ахиезер А. И. и др. Электродинамика плазмы. М., «Наука», 1974.
7. Гинзбург В. Л. Распространение электромагнитных волн в плазме. М., «Наука», 1960.
8. Гинзбург В. Л., Рухадзе А. А. Волны в магнитоактивной плазме. М., «Наука», 1967.
9. Голант В. Е. Основы физики плазмы. М., Атомиздат, 1975.
10. Иванов А. А. Физика сильнонеравновесной плазмы. М., Атомиздат, 1977.
11. Кадомцев Б. Б. Коллективные явления в плазме. М., «Наука», 1976.
12. Ломинадзе Д. Г. Циклотронные волны в плазме. Тбилиси, «Мецниереба», 1975.
13. Михайловский А. Б. Теория плазменных неустойчивостей. Т. 1. Неустойчивости однородной плазмы. Изд. 2-е, перераб. и доп. М., Атомиздат, 1975; Т. 2. Неустойчивости неоднородной плазмы. Изд. 2-е, перераб. и доп. М., Атомиздат, 1977.
14. Пикельнер С. Б. Основы космической электродинамики. М., Физматгиз, 1961.
15. Piddington. Cosmical Electrodynamics. Wiley Inters. NY-L, 1966.
16. Силин В. П. Параметрическое воздействие излучения большой мощности на плазму. М., «Наука», 1973.
17. Силин В. П., Рухадзе А. А. Электромагнитные свойства плазмы и плазмopodobных сред. М., Атомиздат, 1961.
18. Спитцер Л. Физика полностью ионизованного газа. Пер. с англ. М., Изд-во иностр. лит., 1957.
19. Стикс Т. Х. Теория плазменных волн. Пер. с англ. М., Атомиздат, 1965.
20. Цытович В. Н. Нелинейные эффекты в плазме. М., «Наука», 1967.

---

\* Изложение в этой книге следует в значительной степени содержанию и стилю [1—4].

## АЛФАВИТНО-ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

- Адиабатические инварианты 135, 150  
 Альвеновские волны 168  
 Аномальная вязкость 300  
 Аномальное сопротивление 76, 273, 277, 284, 285  
 Арцимовича формула 267  
 Бома коэффициент диффузии 249, 257  
 Булларда — Эльзассера механизм генерации магнитного поля 306  
 Власова уравнение 54  
 Вмороженность магнитного поля 161  
 Волны бесстолкновительные ударные  
 — — — без магнитного поля 130  
 — — — в магнитном поле 292, 299  
 — дрейфовые 244  
 — кноидальные 127  
 — магнитогидродинамические (альвеновские) 168  
 — магнитозвуковые 165  
 — отрицательной энергии 77  
 — электромагнитные необыкновенные 174  
 — — обыкновенные 174  
 Время свободного пробега электрона 21  
 — — — иона 23  
 — — — фотона 49  
 Вязкость магнитная 162  
 Гидродинамика магнитная 157  
 — плазмы без магнитного поля 59  
 — бесстолкновительная 64  
 — двухжидкостная 61  
 — одножидкостная 62  
 — в магнитном поле 157  
 — — — бесстолкновительная 164  
 — — — двухжидкостная 157  
 Давление высокочастотное 34  
 — магнитного поля 157  
 Дебаевский радиус экранирования 9  
 Декремент затухания колебаний (волн) электронный, плазменных 79  
 — — — ионно-звуковых 75  
 Динамо-механизм генерации магнитного поля в движущейся плазме 304  
 Дисперсионная кривая 12  
 Дисперсионное соотношение (уравнение) колебаний плазмы 37  
 Диффузии коэффициент Бома 249, 257  
 — — в магнитном поле 199  
 — — в тороидальных ловушках 261  
 Диффузия аномальная 249, 255, 257  
 — «банановая» 262  
 — в пространстве скоростей (квазилинейная) 104  
 — магнитного поля 162  
 — неоклассическая 262  
 — плазмы в магнитном поле 199  
 Диэлектрической проницаемости тензор 170  
 Длина свободного пробега ионов 21  
 — — — электронов 21  
 Дрейф заряженной частицы в скрещенных полях 14  
 — — — магнитный 136  
 Замагниченности плазмы критерий 155  
 Запас устойчивости 227, 231  
 Запертые частицы в тороидальных магнитных ловушках 205, 262  
 Захват частиц волной 14  
 Индуцированное рассеяние колебаний (волн) 109, 110

- Инкремент нарастания неустойчивости (см. Неустойчивости)  
 Ионизация 17  
 Ионизационное равновесие по Саха 18  
 Интеграл столкновений 55  
 — — в форме Ландау 58  
 Квазилинейная теория 102  
 — — циклотронной неустойчивости 193  
 — — ионно-звуковой неустойчивости 279  
 — — дрейфовых неустойчивостей 254  
 Квазинейтральность 7  
 Квантовая плазма 16  
 Кинетическое уравнение для заряженных частиц 54  
 — — для воли 115  
 Когерентное излучение 53  
 Коллапс плазменных волн 122  
 Коллективный метод ускорения 77  
 Колмогорова — Обухова спектр турбулентности 117  
 Критерий замутненности плазмы 155  
 — Сайдэма 228  
 — устойчивости плазмы Крускала — Шафранова 225  
 Кулоновский логарифм 21  
 Ландау затухание колебаний 12  
 Ларморовская орбита 134  
 — частота 134  
 Ленгмюра двойной слой 287  
 Ленгмюровская плазменная частота электронов 10  
 — — — ионов 68  
 Магнитный момент заряженной частицы 135  
 Магнитное зеркало 143  
 Магнитная ловушка 143  
 Магнитная термоизоляция 163  
 Магнитные островки 209  
 — поверхности 205  
 Магнитная яма 221  
 Магнитное (бетатронное) излучение 271  
 Магнитного поля генерация (см. Динамо-механизм) 309  
 — — — за счет термосилы 309  
 Маха критическое число 130  
 — — — для ионно-звукового солитона 130  
 — — — для магнитозвукового солитона 295  
 «Минимума Н» принцип 221  
 Натяжения силовых линий магнитного поля сила 157  
 Неизотермическая плазма 9  
 Неоклассическая диффузия 262  
 Низкотемпературная плазма 19  
 Неустойчивость Будкера — Бунемана 76  
 — Драммонда — Розенблюта 274  
 — ионно-звуковая 75  
 — конусная 195  
 — модуляционная 119  
 — пучковая 15, 84  
 — распадная параметрическая 91, 98  
 — шланговая 184  
 — циклотронная 180  
 — мазерная 182  
 — равновесия плазмы в магнитном поле 213  
 — — баллонная 230  
 — — гравитационная 231  
 — — дрейфовая 248  
 — — — диссипативная 249  
 — — — запертых частиц 253  
 — — — примесная 252  
 — — — температурная 251  
 — — — токово-конвективная 235  
 — — — желобковая 218  
 — — Крускала — Шварцшильда 215  
 — — тиринг-моды 236  
 «Осцилляции» затухания 80  
 Перестановочные (конвективные) возмущения 220  
 Пинч-эффект 203  
 Плазменное эхо 82  
 Плазменный конденсат 418  
 «Плато» на функции распределения (квазилинейное) 105  
 «Плато-режим» неоклассической диффузии 263  
 Правило обхода Ландау 74  
 Пролетные частицы в тороидальных ловушках 145  
 Разрушение магнитных поверхностей (резонансное) 207  
 Распад плазменной волны 92  
 Рассеяние частиц на колебаниях 24  
 Резонанса плазменной точка 39  
 Резонанс волна — частица 12  
 — гибридный верхний 172  
 — — нижний 167  
 — циклотронный 142  
 Рекомбинация 17  
 Рекомбинационное излучение 47  
 Релаксация электронного пучка в плазме 104  
 Сайдэма критерий 228  
 Самосогласованное поле 54  
 Саха формула 18  
 Сечение тормозного излучения 45  
 Солитон ионно-звуковой 129

— магнитозвуковой 294  
Стабилизация неустойчивости пучковой 88  
— — продольным полем 225  
— — широм 228  
Степень ионизации 17  
Температура электронов 9  
— ионов 9  
Теплообмен между электронами и ионами 26  
Тормозное излучение электронов 43  
Трансформация электромагнитной волны в плазменную 43  
Теплопроводность (температуропро-

водность плазмы без магнитного поля) 57  
— замагниченная 201  
— неоклассическая 265  
Трансформации волн коэффициент 43  
Турбулентность 99  
— ионно-звуковая 118  
— слабая 100  
Токамак 204  
Убегания электронов эффект 30  
Устойчивости плазмы запас 227, 231  
— — критерий Крускала — Шафранова 225  
— — энергетический принцип 211



## ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие . . . . .	3
<b>1. ПЛАЗМА БЕЗ МАГНИТНОГО ПОЛЯ . . . . .</b>	<b>6</b>
§ 1.1. Общие сведения о плазме . . . . .	6
§ 1.2. Плазменные колебания . . . . .	10
§ 1.3. Классификация видов плазмы . . . . .	15
§ 1.4. Столкновения частиц в плазме . . . . .	20
§ 1.5. Явления переноса в плазме . . . . .	27
§ 1.6. Плазма в высокочастотном поле . . . . .	31
§ 1.7. Проникновение электромагнитной волны в плазму. Трансформация в плазменные колебания . . . . .	36
§ 1.8. Излучение плазмы . . . . .	43
§ 1.9. Кинетическое уравнение для плазмы . . . . .	53
§ 1.10. Гидродинамическое описание плазмы . . . . .	59
§ 1.11. Звук в плазме . . . . .	64
§ 1.12. Кинетическая теория ионы в плазме . . . . .	69
§ 1.13. Кинетическая теория волн в плазме (ленгмюровские колебания) . . . . .	78
§ 1.14. Пучковая неустойчивость . . . . .	84
§ 1.15. Параметрическая неустойчивость . . . . .	91
§ 1.16. Резонансное взаимодействие волн и частиц (квазилинейная теория) . . . . .	99
§ 1.17. Резонансное взаимодействие волн и частиц (индуцированное рас- сеяние) . . . . .	109
§ 1.18. Нелинейное взаимодействие волн в слабой турбулентности . . . . .	114
§ 1.19. Модуляционная неустойчивость и коллапс ленгмюровских волн . . . . .	119
§ 1.20. Стационарные нелинейные волны . . . . .	125
<b>2. ПЛАЗМА В МАГНИТНОМ ПОЛЕ . . . . .</b>	<b>134</b>
§ 2.1. Движение заряженных частиц в магнитном поле . . . . .	134
§ 2.2. Примеры движения частиц в магнитном поле . . . . .	142
§ 2.3. Адиабатические инварианты движения частиц в магнитном поле . . . . .	148
§ 2.4. Кинетическая теория плазмы в магнитном поле . . . . .	152
§ 2.5. Гидродинамика плазмы в магнитном поле . . . . .	156

§ 2.6. Колебания и волны в плазме с магнитным полем . . . . .	164
§ 2.7. Кинетическая теория волн в плазме . . . . .	177
§ 2.8. Взаимодействие волн с частицами плазмы в магнитном поле и квазилинейная диффузия . . . . .	187
§ 2.9. Равновесие плазмы в магнитном поле . . . . .	198
§ 2.10. Примеры равновесия плазмы в магнитном поле. Токамак . . . . .	202
§ 2.11. Устойчивость границы плазмы в магнитном поле . . . . .	212
§ 2.12. Желобковая неустойчивость плазмы и энергетический принцип устойчивости в магнитной гидродинамике . . . . .	218
§ 2.13. Стабилизация магнитогидродинамических неустойчивостей в термоядерных ловушках . . . . .	223
§ 2.14. Магнитогидродинамическая неустойчивость равновесия при конечной электропроводности . . . . .	231
§ 2.15. Неустойчивость тиринг-моды . . . . .	236
§ 2.16. «Дрейфовая» неустойчивость плазмы . . . . .	244
§ 2.17. Микронеустойчивость плазмы и аномальная диффузия . . . . .	254
§ 2.18. Энергетический баланс плазмы в токамаке . . . . .	258
§ 2.19. Аномальное сопротивление в плазме и образование двойных слоев . . . . .	273
§ 2.20. Бесстолкновительные ударные волны . . . . .	290
§ 2.21. Генерация и усиление магнитного поля . . . . .	303
Список литературы . . . . .	312
Алфавитно-предметный указатель . . . . .	313

личные сорта частиц с различными скоростями и длинами свободного пробега, перенос тепла частицами разного сорта происходит не одинаково. Поэтому не случайно в плазме вводят раздельное понятие об электронной и ионной теплопроводности (так же, как и диффузии).

Важнейшим свойством плазмы является способность переносить ток под действием электрического поля. Основные черты этого явления с точностью до тонких деталей можно разобрать, даже не прибегая к кинетической теории. Под действием электрического поля в плазме возникают направленные потоки заряженных частиц; иначе говоря, через плазму течет электрический ток. Если геометрические масштабы движения плазмы гораздо больше средней длины свободного пробега частиц, а характерное время движения значительно превышает среднее время свободного пробега, то столкновения должны играть здесь значительную роль.

При прохождении тока через плазму ионы, как правило, можно считать неподвижными. Ток создается потоком электронов. В простейшем случае, когда сила тока постоянна, должно устанавливаться равновесие между силой, с которой действует на электроны электрическое поле, и силой торможения, обусловленной столкновениями между электронами и ионами. Последняя равна среднему значению направленного импульса, теряемого электроном при столкновении с ионами. Электрон испытывает за 1 с  $v_{ei}$  столкновений, при каждом из которых он теряет импульс  $m_e u$ , где  $u$  — направленная скорость электрона. Следовательно, сила торможения равна  $m_e u v_{ei}$  и условие равновесия имеет вид

$$-eE = m_e u v_{ei}. \quad (1.19)$$

Плотность тока в плазме определяется выражением

$$j = -ne u. \quad (1.20)$$

Следовательно,

$$j = (ne^2 / m_e v_{ei}) E = (ne^2 \tau_{ei} / m_e) E. \quad (1.21)$$

Это закон Ома для плазмы.

Величина  $\sigma = (ne^2 / m_e) \tau_{ei}$  — электропроводность плазмы. Подставляя в эту формулу выражение для  $\tau_{ei}$  и численные значения констант, получаем (при  $L_K = 15$ )

$$\sigma \approx 10^7 (T_e^\circ)^{3/2} \text{с}^{-1}. \quad (1.22)$$

Эта формула применима для полностью ионизованной плазмы с однозарядными ионами (водородная плазма). Заметим, что проводимость не зависит от плотности плазмы и с увеличением  $T_e$  быстро возрастает. При температуре около 100 млн. градусов электропроводность водородной плазмы должна более чем на порядок превосходить электропроводность меди при комнатной температуре. Присутствие многозарядных ионов значительно снижает электропроводность плазмы. В общем случае, если относительные

концентрации ионной компоненты плазмы с зарядами  $Z_1, Z_2, \dots$  равны  $\alpha_1, \alpha_2, \dots$ , приведенную выше формулу (1.22) для  $\sigma$  надо заменить следующей:

$$\sigma \approx 10^7 (\sum \alpha_k Z_k / \sum \alpha_k Z_k^2) (T_e^\circ)^{3/2}. \quad (1.23)$$

Для плазмы с очень высокой электронной температурой формулу (1.23) следует видоизменить. Для быстрого электрона эффективное сечение рассеяния  $\sigma_{ei}$  при слишком большом заряде иона становится значительно меньше геометрического сечения иона. В этом случае существенную роль в процессе рассеяния начинает играть взаимодействие электрона с внутренним атомным полем, в результате чего сечение рассеяния значительно увеличивается по сравнению с тем значением, которое получим, рассматривая ион как точечный заряд. При достаточно больших  $\omega_e$  эффективное сечение рассеяния электрона определяется уже не зарядом иона  $Z_i$ , а порядковым номером атома  $Z_a$ , возрастая пропорционально  $Z_a^2$ .

В промежуточной области энергий, где происходит переход от зависимости  $\sigma_{ei} \sim Z_i^2$  к  $\sigma_{ei} \sim Z_a^2$ , эффективное сечение рассеяния падает медленнее, чем  $1/T_e^2$ . Поэтому электропроводность высокотемпературной плазмы при наличии в ней тяжелых компонент возрастает медленнее, чем по закону  $T^{3/2}$ , и оказывается очень чувствительной даже по отношению к малой доле примесей. В водородной плазме при  $T_e \sim 10^8$  вклад одного атома или иона ртути в процесс торможения электронов в несколько тысяч раз превышает вклад иона водорода. В слабоионизованной плазме формула (1.23) уже несправедлива, если электроны сталкиваются с нейтральными частицами чаще, чем с ионами. По физическому смыслу ясно, что в этом случае следует вернуться к выражению для проводимости (1.21), но вместо  $\tau_{ei}$  подставить туда  $\tau_{en}$  — среднее время столкновений электронов с нейтральными атомами и молекулами:

$$\sigma = ne^2 \tau_{en} / m_e. \quad (1.24)$$

Температурный ход коэффициентов электропроводности такой плазмы будет зависеть, в частности, от поведения эффективного сечения рассеяния электронов на нейтральных частицах. Однако в слабоионизованной плазме определяющим температурную зависимость фактором является степень ионизации. Действительно,  $\tau_{en} \sim 1/n_0$ , следовательно,  $\sigma$  пропорционально отношению  $n/n_0$ ; значит, при небольших температурах ( $T \ll I$ )  $\sigma$  пропорционально сильно меняющемуся экспоненциальному множителю  $\exp(-I/2T)$ .

Рассмотрим вкратце применимость закона Ома для плазмы. Этот закон справедлив, если в плазме устанавливается равновесие между силами, действующими на электроны со стороны электрического поля, и силами торможения. Однако должно ли такое равновесие устанавливаться при любых условиях?

Сила торможения, испытываемая электроном в полностью ионизованной плазме, находящимся под действием ускоряющего поля, имеет тем меньшее значение, чем больше скорость электрона. Рас-

смотрим поведение электрона, принадлежащего к далекому хвосту максвелловского распределения  $\omega_e \gg T_e$ . Приращение скорости, приобретаемое электроном в промежутке между двумя «столкновениями» с ионами, пропорционально  $\tau_{ei}$  и, следовательно, растет как  $v^3$ . Поэтому если скорость теплового движения  $v$  у выбранного нами электрона достаточно велика, то приращение скорости  $u$  может оказаться того же порядка, что и  $v$ , или даже превзойти ее. При такой ситуации неприменима упрощенная модель процесса, в которой считается, что электрон набирает на длине пробега относительно небольшую упорядоченную скорость и полностью теряет ее при мгновенном сильном ударе. В действительности ускорение и торможение электрона происходят одновременно. В то время как электрон приобретает упорядоченную скорость, резерфордское рассеяние на ионах постепенно изменяет направление его движения. Электрическое поле стремится распрямить траекторию, в то время как взаимодействие с ионами изгибает ее. Если прирост упорядоченной составляющей скорости не компенсируется рассеянием, то равновесие сил не может установиться и электрон должен перейти в состояние непрерывного ускорения, при котором его энергия будет все время возрастать. С увеличением энергии сила торможения падает, и поэтому электрон, вовлеченный в процесс непрерывного разгона полем, будет продолжать ускоряться, пока он находится в области действия поля. В состоянии разгона полем переходят те электроны плазмы, которые успевают набрать на длине свободного пробега дополнительную скорость  $u$ , превышающую их начальную скорость. Указанное условие разгона можно записать в виде

$$eE\tau_{ei}/m_e > v. \quad (1.25)$$

Поскольку  $\tau_{ei}$  пропорционально  $v^3/n$ , то из (1.25) следует, что непрерывное ускорение происходит в том случае, когда  $E\omega_e/n$  превышает некоторое граничное условие. Как нетрудно убедиться, для водородной плазмы это граничное значение порядка  $3 \cdot 10^{-12}$ , если  $E$  измеряется в вольтах на сантиметр, а  $\omega_e$  — в электронвольтах. В экспериментах с плазмой условие (1.25) обычно удовлетворяется только для электронов с энергией, во много раз превышающей  $T_e$ . Эти электроны составляют очень небольшую долю всей электронной компоненты. Поскольку в указанном случае основной вклад в электрический ток дают составляющие большинство тепловые электроны плазмы, закон Ома верен с высокой точностью. Однако наряду с обычным током проводимости в плазме будет существовать дополнительный ток ускоренных электронов, для которого закон Ома не применим. При большом значении отношения  $E/n$  условие (1.25) будет выполняться также и для электронов со средней тепловой скоростью. В этом случае в процесс непрерывного ускорения может перейти основная часть электронной компоненты плазмы, и тогда закон Ома должен резко нарушиться, так как, вообще говоря, мы имеем дело с нестационарным процессом ускорения электронов. Расчет показывает, что процесс элек-

тронного разгона заметно развивается тогда, когда отношение среднего значения  $u$  для плазмы в целом к средней тепловой скорости электронов становится больше одной десятой. Отношение  $u/v_e$  растет пропорционально  $v_e^2$ , и поэтому если для электронов со средней тепловой энергией  $w_e = T_e$  и  $u/v_e = 0,1$ , то для электронов с энергией  $10T_e$   $u$  сравнивается по значению с  $v_e$ , и такие электроны оказываются близкими к порогу непрерывного ускорения. Переход электронов в состояние непрерывного ускорения можно наблюдать в кольцевых электрических разрядах, когда плазма образуется внутри тороидальной камеры и ускоряется вихревым электрическим полем. В экспериментах такого рода при некоторых условиях действительно наблюдается разгон определенной (относительно небольшой) группы электронов плазмы до очень высокой энергии при сравнительно небольших напряжениях на плазменном витке.

Более глубокий анализ поведения потоков разогнанных электронов показывает, что такие потоки способны возбуждать и раскачивать в плазме различные колебания и волны, передавая им всю энергию или заметную часть ее. В результате этого появляется новый механизм торможения ускоренных частиц, прекращающий разгон после того, как электроны плазмы наберут определенную порцию избыточной энергии направленного движения. Этот автоматический механизм не позволяет всем электронам плазмы перейти в состояние непрерывного ускорения. Ясно, что электропроводность плазмы в указанном случае нельзя вычислять по формуле (1.22) и что торможение электронов при взаимодействии с волнами должно приводить к увеличению сопротивления. К настоящему времени накоплен большой экспериментальный материал по аномалии электропроводности плазмы в сильном электрическом поле. Однако для его анализа требуется привлекать более глубокие и детальные представления нелинейной теории плазменных неустойчивостей (см. § 2.19). При высокой плотности плазмы и относительно небольшой напряженности электрического поля найденные экспериментально значения в пределах погрешностей измерений совпадают со значениями, определенными по формуле (1.23).

## § 1.6. Плазма в высокочастотном поле

Своеобразные свойства плазмы выступают очень отчетливо в том случае, когда рассматривается ее поведение под действием электрического поля высокой частоты. В этих условиях существенную роль начинает играть механическая инерция электронов. Рассмотрим простейший случай. Пусть в плазме действует электрическое поле  $E$ , напряженность которого равна  $E_0 \exp(-i\omega t)$ . Если частота настолько велика, что за время одного периода изменения поля у отдельного электрона вероятность столкновения с ионами достаточно мала, то, рассматривая движение электронов, можно в первом приближении пренебречь силой торможения.

Уравнение движения в этом случае имеет вид

$$m_e \ddot{x} = -eE_0 \exp(-i\omega t), \quad (1.26)$$

где  $x$  — координата в направлении электрического поля. Интегрируя (1.26), получаем

$$u_e = \dot{x} = (eE_0 / im_e \omega) \exp(-i\omega t). \quad (1.27)$$

Следовательно,

$$j = -enu_e = -ne^2 E / im_e \omega. \quad (1.28)$$

Полученное соотношение можно записать в следующей форме:

$$E = (-im_e \omega / ne^2) j. \quad (1.29)$$

Таким образом, высокочастотное напряжение сдвинуто по фазе на  $90^\circ$  назад по сравнению с током. Это означает, что в высокочастотном поле плазма обладает собственной «немагнитной» индуктивностью, которая обусловлена инерцией электронов. При низких концентрациях немагнитная индуктивность плазменного проводника может превосходить его обычную («магнитную») индуктивность. Выясним условия, при которых это может иметь место. Для однородного цилиндрического плазменного проводника с радиусом  $a$  магнитная индуктивность на единицу длины в единицах СГСЭ равна

$$(1/\omega) |E/J| = (1/na^2\omega) |E/j|. \quad (1.30)$$

Обычная индуктивность (коэффициент самоиндукции) в единицах СГСМ для проводника длиной 1 см порядка единицы; в СГСЭ она составляет величину порядка  $1/c^2$ . Следовательно, для плазмы отношение обычной индуктивности к немагнитной индуктивности будет порядка  $\Pi e^2 / m_e c^2 \approx 3 \cdot 10^{-13}$ , где  $\Pi$  — число электронов на 1 см плазменного проводника. Эта величина имеет очень простой смысл. Она равна полному числу электронов, которые находятся внутри отрезка плазменного проводника длиной, равной классическому радиусу  $r_0 = e^2 / m_e c^2$ . Формулу (1.29), связывающую плотность тока с напряженностью высокочастотного поля, можно обобщить, если учесть торможение электронов, вызванное столкновениями. В этом случае получаем

$$E = j((1/\sigma) - i\omega L_e). \quad (1.31)$$

Здесь  $L_e = m_e / ne^2$  — немагнитная индуктивность. Такой характер движения электронов и переносимого ими тока под действием высокочастотного электрического поля играет решающую роль в формировании диэлектрических свойств плазмы. В рассмотренном выше простейшем случае, когда в плазме существует электрическое поле  $E_0 \exp(-i\omega t)$ , ускорение электрона  $\ddot{x}$  и его скорость определяются выражениями (1.26) и (1.27). Интегрируя по времени еще раз, находим смещение

$$x = (e/m\omega^2) E_0 \exp(-i\omega t). \quad (1.32)$$

Из (1.32) следует, что смещение электрона сдвинуто по фазе относительно действующей силы ( $F = -eE$ ) на  $180^\circ$ . Это случай, противоположный тому, с которым мы встречаемся, изучая поведение обычных твердых диэлектриков. При сдвиге по фазе на  $180^\circ$  между силой, действующей на заряд, и его смещением поляризация вещества направлена против поля и, следовательно, диэлектрическая проницаемость  $\epsilon < 1$ . Диэлектрическую проницаемость можно выразить через величину электрического момента единицы объема  $P$  с помощью известной формулы

$$\epsilon = 1 + 4\pi P/E, \quad (1.33)$$

в плазме

$$P = -nex, \quad (1.34)$$

где  $x$  — смещение электронов (смещением ионов можно пренебречь, так как оно очень мало). Из (1.32) и (1.34) находим известное выражение

$$\epsilon = 1 - \omega_p^2/\omega^2, \quad (1.35)$$

из которого следует, что в плазме не могут распространяться электромагнитные волны с частотой, меньшей  $\omega_p$ . Следовательно, показатель преломления  $N = \sqrt{\epsilon} = (1 - \omega_p^2/\omega^2)^{1/2}$ , а волновое число  $k = 2\pi/\lambda$  равно  $k = N\omega/c = (\omega/c)(1 - \omega_p^2/\omega^2)^{1/2}$ .

Дисперсионная кривая для электромагнитных волн приведена на рис. 1.5. Для электромагнитных волн, распространяющихся в пространственно-однородной плазме без магнитного поля, отсутствует явление «затухания Ландау». Это связано с тем, что фазовая скорость волн  $\omega/k = c/(1 - \omega_p^2/\omega^2)^{1/2}$  превышает скорость света в вакууме и, следовательно, нет частиц, которые могли бы находиться в резонансе с такими волнами. Поэтому единственный механизм затухания электромагнитных волн в такой плазме — это торможение электронов, вызванное столкновениями. В формуле для диэлектрической проницаемости учет этого эффекта дает мнимую часть. Действительно, если в уравнении движения для электронов в поле волны учесть силу трения электронов и ионов

$$m_e \ddot{x} = -eE_0 \exp(-i\omega t) - m_e \dot{x}/\tau_{ei},$$

то для смещения  $x$  получаем

$$x = (e/m_e \omega (\omega + i\nu_{ei})) E_0 \exp(-i\omega t).$$

Используя (1.33) и (1.34), находим

$$\epsilon = 1 - \omega_p^2/\omega(\omega + i\nu_{ei}). \quad (1.36)$$

Для электромагнитных волн в плазме, как правило, выполняется неравенство  $\omega \gg \nu_{ei}$ . Действительно, для нижней границы частот

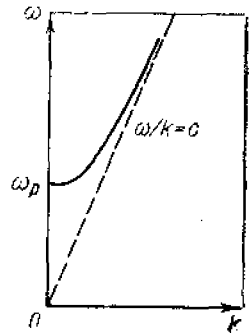


Рис. 1.5. Дисперсионная кривая электромагнитных волн в плазме



$\omega \approx \omega_p$ , оно эквивалентно условию  $\omega_p \tau_{ei} \gg 1$  (условию идеальности плазмы  $n r^3_D \gg 1$ , см § 1.3). По этой причине формулу (1.36) с достаточной степенью точности можно представить двумя первыми членами разложения в ряд по величине  $v_{ei}/\omega$ :

$$\epsilon = 1 - \omega_p^2/\omega^2 + i\omega^2 \nu_{ei}/\omega^3. \quad (1.36a)$$

До сих пор мы рассматривали движение электронов в электрическом поле волны в линейном по амплитуде приближении. В этом приближении электроны совершают быстрые колебания в направлении электрического поля со скоростью  $u$ , определяемой соотношением (1.27). В следующем порядке по амплитуде усредненный эффект квадрата быстрых осцилляций приводит для электромагнитной волны с пространственно неоднородной амплитудой к вытеснению электронов плазмы из областей, занятых электромагнитным полем. Физику такого вытеснения можно объяснить следующим образом. Электромагнитное поле, вызывая высокочастотные колебания электронов со скоростью  $u(t)$ , создает как бы дополнительное высокочастотное давление  $p_{в.ч} \sim n m_e u^2$ , в результате чего электроны плазмы стремятся перемещаться к минимуму поля.

Рассмотрим для определенности стоячую электромагнитную волну. В такой волне электрическое и магнитное поля лежат в плоскости, перпендикулярной к направлению неоднородности (ось  $z$ ):

$$E_x = (1/2) E_x(z) \exp(-i\omega t) + \text{к. с.}$$

$$H_y = (1/2) H_y(z) \exp(-i\omega t) \pm \text{к. с.}$$

Здесь к. с. означает слагаемое, комплексно сопряженное первому. Амплитуды полей связаны соотношением

$$dE_x/dz = i(\omega/c) H_y,$$

вытекающим из уравнения Максвелла:

$$\text{rot E} = - (1/c) \partial \mathbf{H} / \partial t.$$

В соответствии со сделанными выше замечаниями электроны плазмы в волне конечной амплитуды участвуют в двух движениях — быстрых колебаниях в направлении электрического поля и медленном смещении вдоль неоднородности:

$$r = (1/2) x \exp(-i\omega t) + z(t) + \text{к. с.}$$

Уравнение движения электронов вдоль оси  $z$  имеет вид

$$m_e \ddot{z} = - (e/c) u H_y = - (1/4) (e/c) (u \exp(-i\omega t) + \text{к. с.}) \times \\ \times (H_y \exp(-i\omega t) + \text{к. с.}). \quad (1.37)$$

В последней формуле мы учли, что скорость электронов — вещественная величина, и представили ее в виде

$$u = (1/2) u(z) \exp(-i\omega t) + \text{к. с.},$$

где величина  $u(z)$  определяется формулой (1.27). Проведя в правой части (1.37) усреднение по быстрым колебаниям, получим сле-

дующее уравнение для медленного движения электронов по оси  $z$ :

$$\begin{aligned} m_e \ddot{z} &= -(e^2/4m_e\omega^2) (E\partial E^*/\partial z + \text{к. с.}) = \\ &= -(e^2/4m_e\omega^2) \partial |E|^2/\partial z. \end{aligned} \quad (1.38)$$

Это уравнение означает, что в поле электромагнитной волны с пространственно неоднородной амплитудой на электроны плазмы действует сила высокочастотного давления, направленная против градиента электрического поля:

$$F_z = -\partial p_{в.ч.}/\partial z. \quad (1.39)$$

Высокочастотное давление, создаваемое электромагнитной волной, равно

$$p_{в.ч.} = (e^2 n / 4m_e \omega^2) E^2(z). \quad (1.40)$$

Эта формула получена для стоячей монохроматической электромагнитной волны, однако в действительности она имеет достаточно универсальный характер. В частности, такая же формула для высокочастотного давления получается при рассмотрении движения электронов в неоднородном продольном электрическом поле конечной амплитуды:  $E_z = (1/2) E_z(z) \exp(-i\omega t) + \text{к. с.}$  Пусть частицы колеблются около точки  $z_0$  в поле с амплитудой, возрастающей в сторону увеличения  $z$ . При колебательном движении сила направлена против смещения. Поэтому когда электрон смещается направо, на него действует возвращающая сила большей величины, чем при смещении налево. В итоге возникает результирующая сила, действующая в сторону уменьшения  $z$ , т. е. в направлении, обратном градиенту электрического поля.

Ограничиваясь членами, квадратичными по амплитуде поля, действующую на электроны силу можно представить в виде

$$\begin{aligned} F &= -(e/2) [E \exp(-i\omega t) + \\ &+ \delta z (\partial E / \partial z) \exp(-i\omega t)] + \text{к. с.} \end{aligned}$$

Соответственно этому движение электронов по  $z$  представляется в виде суммы быстрых колебаний

$$\delta z = -(eE/2m_e\omega^2) \exp(-i\omega t) + \text{к. с.} \quad (1.41)$$

и медленного смещения под действием силы, усредненной по быстрым осцилляциям:

$$\langle F_z \rangle = -(e/2) \langle \delta z [(\partial E_z / \partial z) \exp(-i\omega t) + \text{к. с.}] \rangle.$$

Подставляя в правую часть этого соотношения  $\delta z$  и проводя усреднение по быстрым колебаниям, вновь приходим к формуле (1.40) для силы высокочастотного давления. Эта сила обращается в нуль для бегущей плоской волны, во всех других случаях она отлична от нуля и приводит к вытеснению плазмы из областей, занятых высокочастотным полем. По этой причине для удержания плотной